BEM-VINDOS AO PRIMEIRO PROCESSO SELETIVO ADAPTATIVO DO BRASIL

Este é um gabarito comentado de todas as questões realizadas em nosso processo seletivo – eixo prova, que ocorreu no dia 27/10/2024.

Lembrando que nosso processo é dividido em 4 blocos, onde o candidato percorre uma trilha de acordo com seu desempenho durante a prova. Neste arquivo você irá encontrar todas as questões que foram disponibilizadas, independente do caminho percorrido. Note que, por conta disso, existirão questões parecidas, porém com grau de complexidade diferente.

Além disso, para evitar possíveis fraudes, durante a aplicação da prova, as questões foram embaralhadas randomicamente, por isso, dentro deste caderno solução, decidimos não as numerar. O mesmo ocorreu com as alternativas de cada questão, que também foram embaralhadas durante a prova.

Uma empresa de tecnologia vende assinaturas de um *software* de gerenciamento. O custo fixo mensal desta empresa é de $\text{R\$ } 50.000{,}00$, e o custo adicional por assinatura é de $\text{R\$ } 20{,}00$.

Esta empresa vende cada assinatura por $\text{R\$ } 300{,}00$, mas para o mês de janeiro de 2025, decidiu que fará uma promoção. As $\boldsymbol{n}$ primeiras pessoas que assinarem nesse período irão ganhar um desconto de $\text{R\$ } 30{,}00$.

Considerando que a venda dessas licenças é a sua única fonte de receita, e que a partir da venda das $\boldsymbol{n}$ primeiras licenças a empresa já não tem prejuízo, determine o valor de $\boldsymbol{n}$.

166
185
200
225
250

Solução: Considerando o desconto e o custo por assinatura, cada venda irá gerar, em reais,

$$300 - 30 - 20 = 250$$

Assim, para não haver prejuízo, o valor de n será

$$n = \frac{50.000}{250} = 200$$

Uma corretora de valores utiliza modelos automatizados para estimar o preço de fechamento das ações ao longo do dia, através de funções matemáticas. Para a ação INTE3, o preço de fechamento $\boldsymbol{P}$ é dado pela seguinte função:

$$P = -0{,}01v^2 + 4v + 100,$$

onde **v** é o volume de transações realizadas, em milhares de ações. Por exemplo, se em um dia foram realizadas 50 mil transações, o preço de fechamento estimado é de:

$$P = -0{,}01 \times 50^2 + 4 \times 50 + 100 = 275{,}00$$

Se o preço de fechamento ao final do dia foi estimado em $\mathbf{R\$\ 59{,}00}$, qual foi o volume de transações (em milhares de ações)?

400
410
420
430
440

Solução: Substituindo na expressão $P = 59$

$$59 = -0{,}01v^2 + 4v + 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}01v^2 - 4v - 41 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -10 \text{ ou } v = 410$$

Como o volume de transações deve ser positivo, devemos ter 410 mil transações.

O *framework* de desenvolvimento ágil chamado *Scrum* é um modelo considerado como referência geral para o gerenciamento de projetos de tecnologia em muitas empresas. Neste *framework*, o projeto é dividido em ciclos regulares de tempo, chamados *sprints*. Uma *startup* está iniciando o desenvolvimento de um novo produto, e decidiu adotar o *Scrum* para gerenciar o projeto, e foi definido que cada *sprint* vai demorar uma semana.

A cada início de *sprint*, é definido o *backlog* de tarefas, ou seja, o número de atividades que precisam ser executadas na *sprint* para que o projeto possa progredir. À medida que o projeto vai evoluindo, há um aumento progressivo no número de tarefas do *backlog*.

Sabe-se que a equipe de desenvolvimento teve o seguinte número de tarefas por *sprint* no primeiro mês:

- *Sprint* 1: 6 tarefas
- *Sprint* 2: 10 tarefas
- *Sprint* 3: 14 tarefas
- *Sprint* 4: 18 tarefas

Considera-se que a progressão se mantém uniforme até que se atinja um *backlog* de 50 tarefas por *sprint*, onde a equipe estará com capacidade máxima de desenvolvimento.

Em qual *sprint* ocorrerá esse momento?

10
11
12
13
14

Solução: A sequência numérica apresentada é uma PA, com $a_1 = 6$ e $r = 4$.

Queremos o n tal que $a_n = 50$

Termo geral da PA,

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 = 6 + (n-1) \times 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 12$$

Uma empresa do ramo de logística abriu um processo de seleção para contratar novos profissionais para operarem os caminhões que transportam insumos dos mais variados tipos. Esses caminhões são dotados de uma nova tecnologia, e precisam ser operados por um *tablet* para realizar o processo de carga e descarga. Além disso, sendo uma empresa multinacional, há uma necessidade dos profissionais dirigirem por diferentes países da América Latina, portanto é necessário que o candidato possua um passaporte válido.

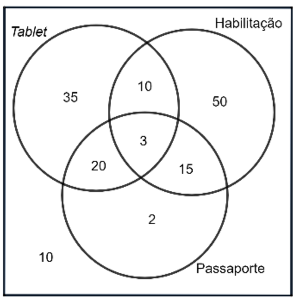
A empresa recebeu um total de 145 candidaturas. Dessas, foram levantadas as seguintes informações:

- 68 candidatos possuem o conhecimento necessário para operar o *tablet*;
- 78 possuem carteira de habilitação compatível com os veículos da empresa;
- 40 estão com o passaporte em dia;
- 13 possuem conhecimento para operar o *tablet* e a habilitação necessária para conduzir os caminhões;
- 18 possuem a habilitação para os caminhões e o passaporte em dia;
- 23 estão com o passaporte em dia e possuem o conhecimento em tecnologia necessário para operar os caminhões;
- 3 candidatos possuem as três qualificações.

Dessa forma, o número de candidatos que não possui nenhuma das três qualificações é:

10
15
20
25
30

Solução: O Diagrama de Venn abaixo representa a situação descrita pelo problema.



O problema poderia ser resolvido diretamente por inclusão-exclusão,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 68 + 78 + 40 - 13 - 18 - 23 + 3 = 135$$

Como foram 145 candidatos, 10 candidatos não possuem nenhuma das qualificações.

A latência de um jogo refere-se ao tempo que um comando enviado pelo jogador leva para ser processado e refletido no servidor do jogo, e para que a resposta seja enviada de volta para o dispositivo do jogador. Em resumo, é o atras entre a ação do jogador e o momento que a ação aparece na tela.

Diz-se que uma experiência de jogo é fluida quando a média de latência dos servidores disponíveis é, no máximo, 30 ms.

Durante alguns testes, foram registrados os seguintes tempos de latência para quatro de cinco servidores disponíveis:

$$28,\ 32,\ 27,\ 29$$

No entanto, devido a uma falha técnica, o tempo de latência do quinto servidor não foi registrado corretamente.

Considerando que queremos uma experiência de jogo fluida, qual é o valor máximo permitido para a latência do quinto servidor?

30
31
32
34
35

<u>Solução</u>: Seja x a média do quinto servidor, então,

$$\frac{28 + 32 + 27 + 29 + x}{5} \leq 30 \Rightarrow$$

$$116 + x \leq 150 \Rightarrow x \leq 34$$

Logo, $x_{máx} = 34$.

Um IPO, ou Oferta Pública Inicial, é um evento em que uma empresa inicia a negociação das suas ações em uma bolsa de valores. Uma *startup* altamente inovadora estava há um ano desenvolvendo um produto no estado da arte, e finalmente anunciou o seu IPO na Bolsa de Valores de São Paulo, a B3. A oferta das ações foi realizada inicialmente a um preço de R$ 30 por ação e Pedro, um jovem investidor brasileiro, resolveu tomar a decisão de adquirir 10 mil ações dessa *startup*.

No entanto, meses depois do IPO, foi identificado que a nova tecnologia desenvolvida pela empresa, tão antecipada pelo mercado, não foi bem-sucedida em cumprir os seus objetivos de negócio. Em uma questão de dias, as ações despencaram, chegando a um décimo do seu valor inicial. O CEO foi substituído, e um plano de ação foi traçado para que a empresa voltasse a subir na bolsa. Neste momento, com a ação em baixa, Pedro resolveu adquirir mais 5 mil ações da *startup*.

Para que Pedro recupere todo o seu valor investido, a ação deve voltar a subir e chegar a pelo menos

R$ 20
R$ 21
R$ 22
R$ 23
R$ 24

Solução: Investimento total

$$\text{R\$ } 30 \times 10.000 + \frac{1}{10} \times \text{R\$ } 30 \times 5.000 = \text{R\$ } 315.000$$

Número de ações adquiridas ao final: $10.000 + 5.000 = 15.000$

Valor por ação para retorno de investimento

$$\frac{\text{R\$ } 315.000}{15.000} = \text{R\$ } 21$$

Uma grande empresa de cosméticos está lançando um novo produto para o público de jovens adultos, e decidiu concentrar todo o seu investimento em marketing em duas redes sociais, A e B. A equipe de marketing da empresa realizou dois ciclos de testes de uma semana cada, para verificar qual das redes sociais apresentava um maior engajamento a uma determinada publicação, potencializando o resultado financeiro.

No primeiro teste, investiu-se R$ 50 mil na plataforma A e R$ 25 mil na rede B, tendo chegado a um total de 20 mil visualizações ao final da semana. Já no segundo teste, foram invertidos os valores de investimento, ou seja, R$ 25 mil em A e R$ 50 mil na rede B, e, ao final da semana, foi visto um resultado somado de 25 mil visualizações.

De posse desses resultados, sabendo que o número de visualizações, em ambas as redes sociais, é diretamente proporcional ao valor investido em publicidade, é possível afirmar que cada mil reais investidos na rede social B gera um retorno de

200
300
400
500
600

Solução: Sejam a e b o retorno em visualizações gerados por mil reais de investimentos nas redes sociais A e B, respectivamente, temos o seguinte sistema:

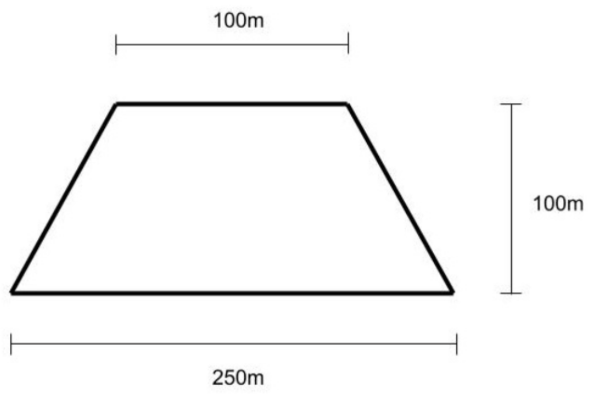
$$\begin{cases} 50a + 25b = 20.000 \\ 25a + 50b = 25.000 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por 2, e subtraindo uma da outra:

$$75b = 30.000 \Rightarrow b = 400$$

Para a gestão de grandes eventos, é de extrema importância que seja calculada a capacidade máxima de pessoas do espaço selecionado, de forma a conseguir estimar a receita potencial através da venda de ingressos.

Uma empresa de festivais de música está organizando um show em um salão que possui as dimensões abaixo.



Sabendo que o município de São Paulo exige uma área mínima de ocupação de $0{,}4$ metro quadrado para cada pessoa no evento, e que cada ingresso será vendido a $\text{R\$ } 200$, **o valor máximo que a empresa poderá arrecadar com a venda de ingressos é de**

R$ 6,25 milhões
R$ 7 milhões
R$ 7,5 milhões
R$ 8,75 milhões
R$ 9,5 milhões

<u>Solução</u>: Área do salão

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b)}{2} \cdot h = \frac{(250+100)}{2} \cdot 100 = 17.500 \text{ m}^2$$

Como cada pessoa deve ter no mínimo $0{,}4 \text{ m}^2$ disponível, a arrecadação máxima será

$$\frac{17.500}{0{,}4} \times \text{R\$ } 200 = \text{R\$ } 8.750.000$$

Uma empresa de tecnologia distribui os seus lucros e resultados para os seus colaboradores no formato de um multiplicador do salário base de cada colaborador $M(x)$, onde x é a sua nota da avaliação de desempenho individual, sendo uma função baseada em dois critérios:

- Um componente constante, que é o mesmo para toda a empresa;
- Um componente variável que é diretamente proporcional à x, onde x pode variar de 0 a 10.

Portanto, o multiplicador final do bônus para cada colaborador é dado pela função $M(x) = ax + b$.

Em 2023, a empresa teve um resultado positivo e realizou a distribuição de lucros e resultados. Marta teve um desempenho excelente, com avaliação de nota 9,5, e recebeu um bônus de 1,45 vezes o seu salário. Já André teve um desempenho um pouco menor, tendo sua avaliação com nota 7,0, e recebeu um bônus de 1,2 vezes o seu salário.

Júlia teve um ótimo desempenho, com sua avaliação ficando em $8,5$. Como base nos critérios apresentados acima, pode-se afirmar que o seu bônus será de

1,05 vezes o seu salário
1,15 vezes o seu salário
1,25 vezes o seu salário
1,35 vezes o seu salário
1,45 vezes o seu salário

Solução: Substituindo os valores dados na função

$$\begin{cases} 9{,}5a + b = 1{,}45 \\ 7a + b = 1{,}2 \end{cases}$$

Subtraindo as equações: $2{,}5a = 0{,}25 \Rightarrow a = 0{,}1$. Substituindo em uma equação, $b = 0{,}5$

$$M(x) = 0{,}1a + 0{,}5 \Rightarrow M(8{,}5) = 1{,}35$$

O departamento de marketing de um shopping center decidiu instalar um arco decorativo na entrada principal para um evento especial de promoção de um novo produto. O arco, além de ser uma peça central da decoração, servirá para atrair a atenção dos visitantes e criar um impacto visual marcante.

O arco tem a forma de uma parábola e terá 30 metros de largura na base e uma altura máxima de 9 metros no centro.

Considerando o eixo x sobre a base do arco e o eixo y como o eixo de simetria da parábola, determine a equação da parábola que representa o arco decorativo.

$y = -\frac{1}{5}x^2 + 9$

$y = -\frac{1}{15}x^2 + 9$

$y = -\frac{1}{25}x^2 + 9$

$y = -\frac{1}{125}x^2 + 9$

$y = -\frac{1}{225}x^2 + 9$

Solução: Como a largura da base da parábola é 30 e y é o eixo de simetria, as raízes da função quadrática serão ± 15.

Pela forma fatorada,

$$y = a(x - r_1)(x - r_2) \Rightarrow$$

$$y = a(x + 15)(x - 15) = a(x^2 - 225)$$

Usando o vértice da parábola $(0, 9)$,

$$9 = -225a \Rightarrow a = -\frac{1}{25} \Rightarrow y = -\frac{1}{25}x^2 + 9$$

Outra possibilidade para resolver o problema seria usar que se as raízes são ± 15, a soma das raízes é $-\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$. Como a função corta o eixo y no ponto $(0,9)$ temos $c = 9$, daí a função é dada por $y = ax^2 + 9$. Finalmente utilizar que 15 é raiz para determinar o valor de a.

Uma empresa de logística está planejando expandir suas operações ao longo das próximas semanas, com o objetivo de aumentar gradativamente a quantidade de entregas realizadas. Com o crescimento acelerado do setor de *e-commerce* e a demanda crescente por serviços rápidos e eficientes, a empresa adotou uma estratégia de ampliação linear no número de entregas semanais.

Assim, o número de entregas aumentará a cada semana de forma constante, seguindo uma taxa de crescimento semanal que continuará até atingir a capacidade máxima operacional da empresa. Esse aumento gradual, permitirá que a empresa se adapte aos novos desafios logísticos e otimize seu processo de entrega. Na primeira semana foram realizadas 50 entregas e na quinta semana, 70.

Sabendo que na 12ª semana a empresa alcançou sua capacidade máxima de entregas, determine quantas entregas a empresa terá feito no total, durante todo o período de crescimento.

105
320
465
930
1205

Solução: Como o número de entregas aumentará de forma constante e linear, o número de entregas por semana formará uma progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 70 = 50 + 4r \Rightarrow r = 5$$

Na 12ª semana,

$$a_{12} = a_1 + 11r = 50 + 11 \times 5 = 105$$

Para o cálculo de todas as entregas ao longo desse período podemos utilizar a soma da PA

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow$$

$$S_{12} = \frac{(50 + 105) \times 12}{2} \Rightarrow S_{12} = 930$$

No cenário atual da educação, as plataformas de *LMS* (*Learning Management System*) desempenham um papel crucial no apoio ao ensino e aprendizado digital. Esses sistemas são projetados para facilitar o gerenciamento, distribuição e acompanhamento de atividades educacionais online, oferecendo uma gama de recursos que incluem desde a criação de cursos até a avaliação e feedback dos alunos.

Uma pesquisa de mercado mostra que poucas são as instituições que possuem plataforma própria, caso do *Inteli* e de sua plataforma *Adalove*.

A maioria é contratante das empresas A, B ou C, existindo instituições que inclusive contratam mais de uma dessas plataformas com o objetivo de utilizar as melhores ferramentas de cada uma.

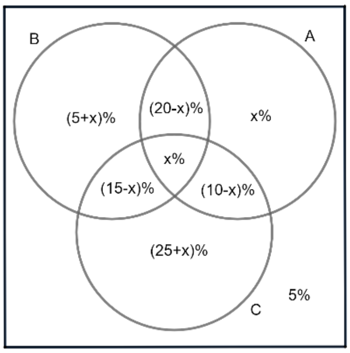
Considere que, nesta pesquisa,

I. 30% utilizam a plataforma A
II. 40% utilizam a plataforma B
III. 50% utilizam a plataforma C
IV. 20% utilizam as plataformas A e B
V. 10% utilizam as plataformas A e C
VI. 15% utilizam as plataformas B e C
VII. 20 instituições utilizam as plataformas A, B e C

Sabendo que apenas 5% das instituições pesquisadas possuem plataforma própria ou utilizam uma plataforma diferente de A, B ou C, determine quantas utilizam a plataforma C

5
10
50
100
125

<u>Solução</u>: O Diagrama de Venn abaixo representa as informações de I até VI.



Somando todos os valores do diagrama

$$(5 + x + 20 - x + x + 15 - x + x + 10 - x + 25 + x + 5)\% = 100\% \Rightarrow x = 20$$

Da informação VII, sendo n o total de pessoas, $20\% \cdot n = 20 \Rightarrow n = 100$.
Assim, o número de pessoas que utilizam C é $50\% \cdot 100 = 50$

Um desenvolvedor de jogos está otimizando a taxa de quadros por segundo (FPS) de um novo jogo de realidade virtual. Durante os testes de desempenho, ele mede a taxa de quadros e precisa calcular a duração de cada quadro para determinar a eficiência gráfica do jogo.

Considerando que:

- 1 frame por segundo FPS representa a quantidade de quadros exibidos por segundo.

Durante um teste específico, o desenvolvedor observa que o jogo atinge uma taxa de $240\ \mathrm{FPS}$.

Qual é a duração, aproximadamente, de cada quadro em milissegundos (ms/frame) para essa configuração?

$1{,}5$
$4{,}17$
$6{,}25$
$8{,}33$
$9{,}25$

Solução: Basta fazer uma regra de três simples

$$\begin{array}{ccc} 240 \text{ quadrados} & \text{———} & 1 \text{ segundo} \\ 1 \text{ quadrados} & \text{———} & t \text{ segundos} \end{array}$$

$$t = \frac{1}{240}\ \mathrm{s} = \frac{1000}{240}\ \mathrm{ms} = 4{,}17\ \mathrm{ms}$$

Uma nova *startup* focada em inteligência artificial foi lançada há seis meses. O seu produto, um aplicativo que funciona juntamente com a câmera do celular para exibir informações sobre pontos turísticos com realidade aumentada, começou a fazer bastante sucesso após o segundo mês de lançamento.

Ao analisar a loja de aplicativos, foi observada uma média mensal de 260 mil *downloads* nesses seis meses. Sabe-se que não houve *downloads* no primeiro mês, após o lançamento, e os meses seguintes tiveram, respectivamente, 50, 150, 200 e 220 mil *downloads*.

Portanto, é possível afirmar que o total de *downloads* no sexto mês foi de

940 mil
900 mil
860 mil
820 mil
680 mil

Solução: Seja x o total de *downloads*, em milhares, no sexto mês

$$\frac{0 + 50 + 150 + 200 + 220 + x}{6} = 260 \Rightarrow x = 940$$

Em um investimento, Pedro aplicou uma certa quantia em dois tipos de investimentos diferentes: um que rende juros simples e outro que rende juros compostos. Após dois anos, ele recebeu um montante R\$ 10.000,00.

O investimento que rende juros simples gerou um montante R\$ 500,00 acima do montante gerado pelos juros compostos.

Sabendo que a taxa de juros simples é de 5% ao ano e a taxa de juros compostos é de 4% ao ano, determine, aproximadamente, o módulo da diferença entre os valores investidos em cada tipo de investimento.

R\$ 500
R\$ 463
R\$ 415
R\$ 381
R\$ 327

Solução: Seja x montante final aplicado em juros simples e y o montante final aplicado em juros compostos.

$$\begin{cases} x + y = 10.000 \\ x - y = 500 \end{cases} \Rightarrow x = 5.250 \text{ e } y = 4.750$$

Lembrando que estes são os montantes finais, vamos determinar os valores investidos.

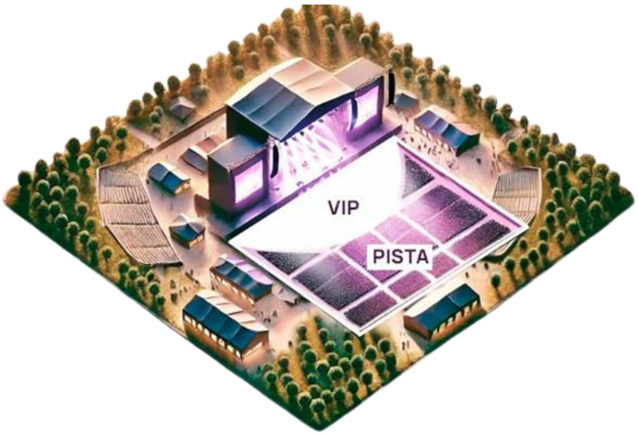
$$M_{simples} = C \cdot (1 + i\% \times t) \Rightarrow 5.250 = C_s \cdot (1 + 0{,}05 \times 2) \Rightarrow C_s = \frac{5250}{1{,}10} = \text{R\$ } 4.772{,}72$$

$$M_{compostos} = C \cdot (1 + i\%)^t \Rightarrow 4.750 = C_C \cdot (1 + 0{,}04)^2 \Rightarrow C_s = \frac{4.750}{1{,}0816} = \text{R\$ } 4.391{,}64$$

Assim, a diferença entre valores investidos será

$$4772{,}72 - 4391{,}64 = 381{,}08$$

Um evento ao ar livre será realizado em uma área disponível de formato quadrado com 100 metros de lado. A região mais próxima do palco será destinada à área VIP, que é uma área semicircular com raio de 50 metros. O restante da área será a "pista".



O valor do ingresso na área VIP é R\$ 800,00, enquanto o valor na pista é R\$ 400,00. Dentro da área VIP serão permitidas no máximo 3 pessoas por metro quadrado e fora da área VIP 4 pessoas. Qual seria a arrecadação máxima do evento?

Obs.: Considere $\pi = 3{,}14$

R\$ 14.325.500
R\$ 15.550.000
R\$17.640.000
R\$ 18.750.000
R\$ 19.140.000

Solução: Tamanho da área disponível: $A = 100 \times 100 = 10.000\ \mathrm{m}^2$

Área VIP: $A_{VIP} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 50^2}{2} = 3.925\ \mathrm{m}^2$

Área pista: $A_p = 10.000 - 3.925 = 6.075\ \mathrm{m}^2$

Máximo de pessoas na área VIP: $P_{VIP} = 3 \times A_{VIP} = 3 \times 3.925 = 11.755\ \mathrm{m}^2$

Máximo de pessoas na pista: $P_p = 4 \times A_p = 4 \times 6.075 = 24.300\ \mathrm{m}^2$

Arrecadação na área VIP: $R_{VIP} = 800 \times 11.755 = \text{R\$ } 9.420.000$

Arrecadação na pista: $R_p = 400 \times 24.300 = \text{R\$ } 9.720.000$

Arrecadação total: $\text{R\$ } 9.420.000 + \text{R\$ } 9.720.000 = \text{R\$ } 19.140.000$

Venture Capital (VC), também conhecido como capital de risco, é uma forma de investimento de alto risco em que fundos formados por investidores aportam um capital para empresas, usualmente *startups* em início de operação, com pouco ou até mesmo nenhum faturamento. Devido ao alto risco das startups não terem sucesso, os fundos de VC trabalham com uma estratégia de pulverização dos investimentos, ou seja, eles aportam quantias em diversas empresas em formação, analisando que o sucesso de uma delas pode compensar o fracasso de outras, garantindo assim um investimento global com altos retornos.

Um fundo de VC desenvolveu uma metodologia de análise de probabilidade de sucesso de novas startups após um certo tempo, baseada em indicadores financeiros, apetite do mercado para a inovação proposta, experiência dos fundadores e outros fatores estratégicos. Este fundo está analisando o investimento em três *startups* promissoras. A *startup* A teve uma probabilidade de sucesso avaliada em 30%, enquanto a *startup* B teve uma probabilidade de sucesso avaliada em 50% e a C, em 60%.

Considerando que o sucesso, ou fracasso, de uma *startup* não influência em outra, qual a probabilidade de nenhuma das três startups ser bem-sucedida?

28%
14%
100%
12%
24%

Solução: Vamos calcular a probabilidade de fracasso (complementar de sucesso)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 30\% \Rightarrow P(A^C) = 70\%$$
$$P(B) = 50\% \Rightarrow P(B^c) = 50\%$$
$$P(C) = 60\% \Rightarrow P(C^c) = 40\%$$

Então, a probabilidade de nenhuma delas ser bem-sucedida é,

$$70\% \times 50\% \times 40\% = 14\%$$

Em computação, é muito comum desenvolver soluções baseadas em números binários. Os circuitos digitais são construídos utilizando essa base numérica, mas as aplicações vão muito além, cobrindo casos como redes neurais, manipulação de bits e criptografia. Particularmente em criptografia, uma aplicação de números binários é na chamada **cifra de chave única** ou **cifra de uso único**, uma técnica de criptografia que é considerada inquebrável. Nessa técnica, as chaves são usadas apenas uma vez e precisam ser descartadas logo em seguida.

Para desenvolver o algoritmo da cifra de chave única, é utilizado um operador chamado $\boldsymbol{XOR}$, também conhecido por **ou exclusivo**. Esse operador é usado para combinar dois valores binários com mesmo número de algarismos. Para cada algarismo, o resultado da operação é 0 se eles forem iguais entre si, e 1 se forem diferentes entre si. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
1\, XOR\, 0 &= 1 \\
1\, XOR\, 1 &= 0 \\
0\, XOR\, 1 &= 1 \\
0\, XOR\, 0 &= 0
\end{aligned}
$$

Uma empresa de segurança cibernética usa o algoritmo de cifra de chave única para criptografar imagens sensíveis. Uma imagem de teste, convertida em um número binário, possui valor $\boldsymbol{A = 10011}$. A chave usada para o teste foi $\boldsymbol{B = 00111}$.

Sabendo desses valores, qual é o resultado da operação $A\, XOR\, B$?

00111
10011
11100
10100
10101

<u>Solução</u>: Comparando algarismo a algarismo vemos que, o segundo, o quarto e o quinto algarismos são iguais, enquanto o primeiro e terceiro diferentes.

Lembrando que para algarismos iguais o operador XOR retorna 0, e para diferentes retorna 1 a sequência será: 10100

Diversos jogos modernos utilizam uma geração de mapas de forma **procedural**. Essa técnica envolve a construção de mapas aleatórios, de forma a incrementar a experiência de quem estiver jogando, possibilitando assim uma característica importantíssima na indústria, que é a "rejogabilidade".

Para se criar mapas e dados aleatórios em um *software*, são desenvolvidos algoritmos que utilizam diversas propriedades de números naturais. Uma empresa de jogos está se preparando para lançar o próximo jogo de uma importante franquia.

A sua equipe decidiu desenvolver um novo algoritmo para criar os seus mapas, que calcula a área do mapa a partir de uma função $f(x) = 2x - 1$, onde x é o número de divisores positivos da quantidade de experiência que o personagem do jogador possui no momento em que o mapa é carregado.

Em um teste, um personagem possuía uma experiência total de 840. Quando o mapa for carregado, qual será o valor da área do mapa?

7
11
19
63
1679

Solução: Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a fatoração em primos de um natural $n > 1$, seu número de divisores é dado por,

$$d(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_k) \Rightarrow$$

Fatorando $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, logo

$$d(840) = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

Assim, $f(x) = 2 \times 32 - 1 = 63$.

A Inteli and Energy, uma *startup* no setor de energia renovável, está expandindo seu negócio de instalação de painéis solares em residências e empresas. A empresa prevê que a adoção dessa tecnologia irá crescer de forma exponencial nos próximos anos, devido à crescente demanda por soluções sustentáveis e incentivos governamentais.

Os analistas da *startup* estimam que o número de clientes que adotam seus serviços pode ser modelado pela função exponencial

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

onde, $N(t)$ é o número de clientes após t anos, N_0 é o número inicial de clientes, k é uma constante e t é o tempo medido em anos.

Sabendo que, inicialmente $(t = 0)$, o número de clientes era 500 e que após um ano $(t = 1)$ existiam 750 clientes, determine a quantidade de clientes após o segundo ano.

875
1.000
1.125
1.250
1.500

Solução: Usando $t = 0$: $N(0) = N_0 = 500$

Usando $t = 1$: $750 = 500 \cdot e^k \Rightarrow e^k = \frac{3}{2}$

Usando $t = 2$: $N(2) = 500 \cdot e^{2k} = 500 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1125$

Observação: O candidato poderia notar que de um ano para outro o valor subiu 50%. Como a função é exponencial, ela pode ser modelada como uma aplicação de juros compostos, ou seja, todo ano sobe o mesmo percentual. Logo, o valor final seria

$$750 + 50\% \cdot 750 = 1125$$

Uma empresa de tecnologia está monitorando as médias de remuneração anual de seus funcionários para entender melhor a distribuição salarial entre homens e mulheres. Inicialmente, percebe que seu quadro de funcionários está distribuído da seguinte forma:

- Homens: R$ 60.000 (média de remuneração anual)
- Mulheres: R$ 50.000 (média de remuneração anual)
- Total de funcionários: 80 homens e 20 mulheres

Querendo que o salário médio de ambos os grupos fosse igual e que a composição do quadro de funcionários não fosse tão discrepante, a empresa decidiu por uma nova configuração com 60 homens e 40 mulheres, sem aumento de custo total.

Determine o aumento percentual do salário médio das mulheres

14%
16%
18%
20%
22%

Solução: Custo no primeiro quadrado de funcionários

$$\text{R\$ }60.000 \times 80 + \text{R\$ }50.000 \times 20 = R\$\ 5.800.000$$

Sendo x o salário médio de cada grupo

$$60x + 40x = 5.800.000 \Rightarrow x = 58.000$$

Aumento percentual: $\frac{58.000}{50.000} = 1{,}16 \Rightarrow 16\%$ de aumento

Em análise de algoritmos, o “consumo de tempo” de um algoritmo é uma medida fundamental de sua eficiência. Esse consumo de tempo é frequentemente descrito por uma equação de recorrência, que expressa o tempo necessário para resolver o problema em termos de problemas menores.

Um exemplo é o *Soma Array*, algoritmo que soma os elementos de uma lista. Para somar os n primeiros elementos da lista, ele soma os $n-1$ primeiros elementos, depois soma esse resultado ao n-ésimo termo da lista.

Deste modo, a equação de recorrência para o “consumo de tempo” será

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

onde, $T(n)$ é o tempo para somar os n primeiros números da lista.

Determine $T(20)$, considerando $T(1) = 1$.

20
19
18
15
11

Solução: A sequência é uma PA de razão 1. Usando o termo geral da PA

$$T(n) = T(1) + (n-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(20) = T(1) + 19r = 20$$

Observação: Informalmente, testando valores iniciais consegue-se notar que $T(n) = n$.

Venture Capital (VC), também conhecido como capital de risco, é uma forma de investimento de alto risco em que fundos formados por investidores aportam um capital para empresas, usualmente *startups* em início de operação, com pouco ou até mesmo nenhum faturamento. Devido ao alto risco das *startups* não terem sucesso, os fundos de VC trabalham com uma estratégia de pulverização dos investimentos, ou seja, eles aportam quantias em diversas empresas em formação, analisando que o sucesso de uma delas pode compensar o fracasso de outras, garantindo assim um investimento global com altos retornos.

Um fundo de VC desenvolveu uma metodologia de análise de probabilidade de sucesso de novas startups após um certo tempo, baseada em indicadores financeiros, apetite do mercado para a inovação proposta, experiência dos fundadores e outros fatores estratégicos. Este fundo está analisando o investimento em três startups promissoras. A startup A teve uma probabilidade de sucesso avaliada em 40%, enquanto a startup B teve uma probabilidade avaliada de 50% e a C, em 60%.

De posse dessas informações, qual a probabilidade de exatamente duas das três *startups* serem bem-sucedidas?

100%
8%
38%
62%
0,2%

Solução: Vamos calcular a probabilidade de fracasso (complementar de sucesso)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 40\% \Rightarrow P(A^C) = 60\%$$
$$P(B) = 50\% \Rightarrow P(B^c) = 50\%$$
$$P(C) = 60\% \Rightarrow P(C^c) = 40\%$$

Abrindo em casos,

I. As empresas A e B serem bem-sucedidas e C não:

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C^c) = 40\% \times 50\% \times 40\% = 8\%$$

II. As empresas A e C serem bem-sucedidas e B não:

$$P(A) \cdot P(C) \cdot P(B^c) = 40\% \times 60\% \times 50\% = 12\%$$

III. As empresas B e C serem bem-sucedidas e A não:

$$P(B) \cdot P(C) \cdot P(A^c) = 50\% \times 60\% \times 60\% = 18\%$$

Probabilidade total: $8\% + 12\% + 18\% = 38\%$

Em computação, é muito comum desenvolver soluções baseadas em números binários. Os circuitos digitais são construídos utilizando essa base numérica, mas as aplicações vão muito além, cobrindo casos como redes neurais, manipulação de bits e criptografia. Particularmente em criptografia, uma aplicação de números binários é na chamada **cifra de chave única** ou **cifra de uso único**, uma técnica de criptografia que é considerada inquebrável. Nessa técnica, as chaves são usadas apenas uma vez e precisam ser descartadas logo em seguida.

Para desenvolver o algoritmo da cifra de chave única, é utilizado um operador chamado $\boldsymbol{XOR}$, também conhecido por **ou exclusivo**. Esse operador é usado para combinar dois valores binários com mesmo número de algarismos. Para cada algarismo, o resultado da operação é 0 se eles forem iguais entre si, e 1 se forem diferentes entre si. Ou seja:

$$1\ XOR\ 0 = 1$$
$$1\ XOR\ 1 = 0$$
$$0\ XOR\ 1 = 1$$
$$0\ XOR\ 0 = 0$$

Uma empresa de segurança cibernética usa o algoritmo de cifra de chave única para criptografar imagens sensíveis. Para um teste realizado, um analista júnior da empresa combinou duas imagens fornecidas em base decimal, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{6}$ e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{3}$, através de uma operação de soma, e então aplicou a criptografia utilizando uma chave $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{10111}$.

Sabendo desses valores, qual é o resultado da operação $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{XOR}\ \boldsymbol{C}$?

11111
11110
00000
00111
10101

Solução: Podemos calcular $A + B$ na base 10 para depois passar o resultado para base 2.

$$A + B = 6 + 3 = 9 = (1001)_2$$

Para utilizar o operador a quantidade de dígitos deve ser igual, ou seja, $A + B = (01001)_2$.

Note que entre $A + B$ e C apenas o quinto algarismo é igual, portanto,

$$(A + B)\ XOR\ C = 11110$$

Diversos jogos modernos utilizam uma geração de mapas de forma **procedural**. Essa técnica envolve a construção de mapas aleatórios, de forma a incrementar a experiência de quem estiver jogando, possibilitando assim uma característica importantíssima na indústria, que é a "rejogabilidade".

Para se criar mapas e dados aleatórios em um *software*, são desenvolvidos algoritmos que utilizam diversas propriedades de números naturais. Uma empresa de jogos está se preparando para lançar o próximo jogo de uma importante franquia.

A sua equipe decidiu desenvolver um novo algoritmo para criar os seus mapas, que calcula a área do mapa a partir de uma função $f = x + 2y$, onde x é o número de divisores positivos da quantidade de experiência que o personagem do jogador possui no momento em que o mapa é carregado, e y é o maior divisor comum entre o nível do personagem e a sua experiência.

Em um teste, um personagem estava no nível 44 e uma experiência total de 840. Quando o mapa for carregado, qual será o valor da área do mapa?

40
11
14
18
54

Solução: Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a fatoração em primos de um natural $n > 1$, seu número de divisores é dado por,

$$d(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_k) \Rightarrow$$

Fatorando $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, logo

$$x = d(840) = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

Para calcular o mdc entre dois números podemos fatorá-los, “tomarmos” os fatores comuns com menor expoente, ou seja,

$$y = \text{mdc}(44, 840) = \text{mdc}(2^2 \times 11; 2^3 \times 3 \times 5 \times 7) = 4$$

Assim,

$$f = x + 2y = 32 + 2 \times 4 = 40$$

A Inteli and Energy, uma *startup* no setor de energia renovável, está expandindo seu negócio de instalação de painéis solares em residências e empresas. A empresa prevê que a adoção dessa tecnologia irá crescer de forma exponencial nos próximos anos, devido à crescente demanda por soluções sustentáveis e incentivos governamentais.

Os analistas da *startup* estimam que o número de clientes que adotam seus serviços pode ser modelado pela função exponencial

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

onde, $N(t)$ é o número de clientes após t anos, N_0 é o número inicial de clientes, k é uma constante e t é o tempo medido em anos.

Sabendo que, inicialmente $(\boldsymbol{t = 0})$, o número de clientes era $\mathbf{500}$ e que após um ano $(\boldsymbol{t = 1})$ existiam $\mathbf{750}$ clientes, determine, dentre as opções abaixo, o menor período no qual o número de clientes é superior a $\mathbf{2.000}$.

Considere: $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$

três anos
três anos e meio
quatro anos
quatro anos e meio
cinco anos

Solução: Usando $t = 0$: $N(0) = N_0 = 500$

Usando $t = 1$: $750 = 500 \cdot e^k \Rightarrow e^k = \frac{3}{2}$

Queremos $N(t) > 2.000$

$$2000 < 500 \cdot e^{kt} = 500 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t \Rightarrow 4 < \left(\frac{3}{2}\right)^t$$

$$2 \cdot \log 2 < t \cdot (\log 3 - \log 2) \Rightarrow 2 \cdot 0{,}3010 < t \cdot (0{,}4771 - 0{,}3010) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t > 3{,}418 \text{ anos}$$

Uma empresa de tecnologia está monitorando as médias de remuneração anual de seus funcionários para entender melhor a distribuição salarial entre homens e mulheres. Ao levantar os dados, o diretor de RH (recursos humanos), percebeu que havia discrepâncias tanto no número de funcionários, como na média salarial anual de ambos os grupos.

Atualmente, há mais homens do que mulheres na empresa e o salário médio dos homens é maior que o salário médio das mulheres. Este diretor decidiu então:

- reformular o quadro (mudar os percentuais de homens e mulheres dentro da empresa), não mudando a quantidade total de funcionários;
- diminuir a diferença de média salarial entre esses grupos, sem reduzir o salário médio de cada um dos grupos.

Ao apresentar a proposta para o CFO (*chief financial officer*) da empresa, o que seria uma resposta correta dele para o diretor de RH?

Opções:

"Gosto da proposta, mas como ambos os grupos terão um aumento médio salarial, o salário médio da empresa inteira irá aumentar, o que pode ser um problema do ponto de vista financeiro."

"Gosto da proposta, pois, é possível recompor o quadro de modo que o custo da empresa não aumente, mesmo com ambos os grupos tendo um aumento médio de salário."

"Gosto da proposta. Entendo que o salário médio da empresa irá aumentar, aumentando o custo, porém a diversidade no quadro garantirá maior receita."

"Não gosto da proposta. O aumento dos salários médios de ambos os grupos vai aumentar o custo total de funcionários e não há justificativa para realizarmos tal mudança."

"Gosto da proposta. Aumentar o salário médio de cada grupo reduzirá o salário médio da empresa, o que significa redução de custos."

Solução: Para ver que isto é possível, considere o seguinte exemplo:

Inicial:

- Homens: R$ 50.000 (média de remuneração anual)
- Mulheres: R$ 40.000 (média de remuneração anual)
- Total de funcionários: 80 homens e 20 mulheres

Custo folha salarial:

$$(80 \times 60.000) + (20 \times 40.000) = 4.800.000$$

Final:

- Homens: R$ 51.000 (média de remuneração anual)
- Mulheres: R$ 46.000 (média de remuneração anual)
- Total de funcionários: 40 homens e 60 mulheres

Custo folha salarial:

$$(40 \times 51.000) + (60 \times 46.000) = 4.800.000$$

Note que, neste caso, ainda existe diferença salarial, porém, menor que a inicial e a distribuição do quadro de funcionários é menos discrepante.

Em análise de algoritmos, o consumo de tempo de um algoritmo é uma medida fundamental de sua eficiência. Esse consumo de tempo é frequentemente descrito por uma equação de recorrência, que expressa o tempo necessário para resolver o problema em termos de problemas menores.

Um exemplo é o *Insertion Sort*, algoritmo que ordena os elementos de uma lista. Para ordenar os n primeiros elementos da lista, ele ordena os $n-1$ primeiros elementos, depois compara o termo da posição n, com os termos das posições $n-1, n-2, n-3, \ldots$ até encontrar alguém menor, alocando este termo na posição correta.

Deste modo, para o pior caso, sua equação de recorrência será

$$T(n) = T(n-1) + n$$

onde, $T(n)$ é o tempo para ordenar os n primeiros números da lista.

Determine $\boldsymbol{T(20)}$, considerando $\boldsymbol{T(1) = 1}$.

210
190
180
150
110

<u>Solução</u>: Escrevendo as equações de recorrência para $n = 2, 3, \ldots, 20$

$$\begin{cases} T(20) = T(19) + 20 \\ T(19) = T(18) + 19 \\ T(18) = T(17) + 18 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \quad T(2) = T(1) + 2 \end{cases}$$

Somando as equações

$$T(20) = 1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{(1+20)\cdot 20}{2} = 210$$

Um pixel é uma unidade de uma imagem digital que representa um ponto de cor. Essa cor pode ser retratada usando diferentes formatos, sendo o mais comum o RGB, que indica proporções das cores vermelha (R), verde (G) e azul (B). Um pixel, então, pode ter sua cor apresentada como uma matriz 1×3, como abaixo:

$$\text{pixel} = [R \quad G \quad B]$$

Cada elemento da matriz é um número que varia entre 0 e 255. Portanto, um pixel de cor $[255 \quad 0 \quad 0]$ possui o máximo possível de vermelho e nenhum componente de verde ou azul. Um pixel de cor $[0 \quad 0 \quad 0]$ não possui nenhum componente de cor, ou seja, está na cor preta. Já um pixel de cor $[255 \quad 255 \quad 255]$ possui o máximo dos três componentes, aparecendo como branco no computador.

Um uso bem comum em aplicativos de edição de imagem é o de filtros para intensificar determinadas cores. Os filtros são matrizes numéricas 3 x 3 que são aplicados a cada um dos pixels de uma imagem para gerar o resultado com o efeito desejado. Ou seja:

$$\text{novo pixel} = \text{pixel} \times \text{filtro}$$

Se o filtro tem por objetivo intensificar uma das cores primárias (vermelho, verde ou azul), ele será representado através de uma matriz diagonal, como no exemplo abaixo, que intensificará a cor vermelha quando aplicado a uma imagem:

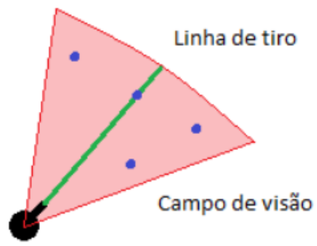
$$filtro = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando o filtro acima, e um pixel de cor $[\mathbf{100} \quad \mathbf{80} \quad \mathbf{60}]$, qual seria a cor do pixel resultante?

$[100 \quad 80 \quad 60]$
$[150 \quad 80 \quad 60]$
$[150 \quad 120 \quad 90]$
$[150 \quad 0 \quad 0]$
$[1{,}5 \quad 1 \quad 1]$

Solução: Basta multiplicar as matrizes

$$[100 \quad 80 \quad 60] \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [150 \quad 80 \quad 60]$$



Sua equipe está desenvolvendo um novo jogo de tiro em $2D$ em que o jogador só consegue enxergar o que o seu personagem enxergaria. Portanto, o jogo deve renderizar apenas os elementos de coordenadas $(x,\ y)$ que satisfizerem as seguintes condições:

- O elemento se encontra sobre ou dentro de uma circunferência C_1 de raio 5, com centro no personagem;

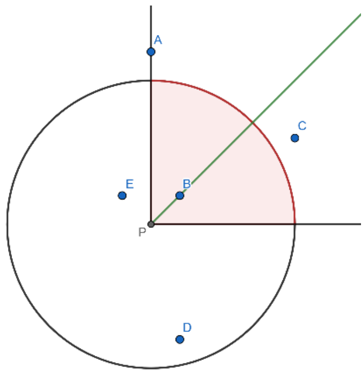
- O elemento está dentro do campo de visão do personagem, região formada por duas semirretas que se originam no personagem e possuem um ângulo de 90 graus entre si.

Um outro elemento importante no jogo é a linha de tiro do personagem. A linha de tiro é formada pela bissetriz das duas semirretas que compõem o seu campo de visão.

Em um dado momento do jogo, o personagem está posicionado nas coordenadas $(3,\ 2)$. A linha de tiro é dada pela equação $x - y - 1 = 0$ (apontando para o primeiro quadrante de C_1). Sabendo que as alternativas abaixo correspondem a diferentes elementos do jogo, marque aquele que deve ser renderizado:

$(3, 8)$
$(4, 3)$
$(8, 5)$
$(4, -2)$
$(2, 3)$

<u>Solução</u>: Como o coeficiente angular da bissetriz é 1, e o ângulo de visão do atirador é 90^o, as retas que definem o ângulo de visão serão paralelas aos eixos passando pelo ponto (3,2). Assim, a região renderizada deve ter $x > 3$ e $y > 2$.



Deste modo, os pontos $(3, 8), (4, -2)$ e $(2, 3)$ não satisfazem.

O ponto $(8, 5)$ é externo ao círculo, basta calcular a distância até o ponto $(3, 2)$.

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Ponto $(8, 5)$: $d = \sqrt{(8-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{34} > 5$

Por fim, note que o ponto $(4, 3)$ tem $x > 3$, $y > 2$ e tem distância $d = \sqrt{(4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} < 5$.

Um **índice de ações**, como o Ibovespa, é um índice que mede o desempenho de um determinado conjunto ou subconjunto de ações negociadas em bolsa de valores. Os índices de ações são utilizados como base para apoiar investidores na análise de preços de mercado, sendo parte do processo de tomada de decisão com relação a compra e venda de ativos. O gráfico abaixo representa, por exemplo, a variação do índice IBOVESPA.

Se for considerado um tempo suficientemente longo, esse tipo de gráfico pode ser aproximado por polinômios, bastando o grau $\boldsymbol{n}$ ser suficientemente grande, possibilitando algumas análises rápidas.

Suponha um índice fictício INTL, se comporta ao longo do tempo conforme o polinômio abaixo:

$$P(x) = x^5 - 8x^3 + 16x + 50,$$

onde x é o tempo transcorrido, em anos, após o início da medição do índice.

A partir dessa informação, é possível afirmar que o número de vezes que o índice atinge o marco de 50 pontos entre o primeiro e o quinto ano de medição é de:

0
1
2
3
4

Solução: Como queremos que o índice seja 50, devemos ter $P(x) = 50$

$$x^5 - 8x^3 + 16x + 50 = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^5 - 8x^3 + 16x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^4 - 8x^2 + 16) = x(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}$$

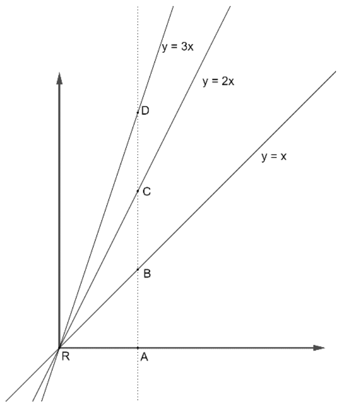
Como x é o tempo após o início da medição do índice, devemos ter $x > 0$.

Assim, $x = \sqrt{2}$ (uma solução).

Uma empresa de logística programou um robô para que ele buscasse objetos do dia a dia em quatro centros de distribuição que se encontram sobre a mesma reta $x = k$ (constante). O robô está configurado de modo que sua direção inicial já aponta para o centro de distribuição A, situada sobre a reta $y = 0$.

Caso o robô tenha que buscar algum objeto no centro de distribuição B ele andará sobre a reta $y = x$, para o centro de distribuição C ele andará sobre a reta $y = 2x$ e para o D sobre a reta $y = 3x$. Considere que o robô se encontra na origem desse sistema de coordenadas.

A figura abaixo ilustra a situação descrita por essa empresa de logística:

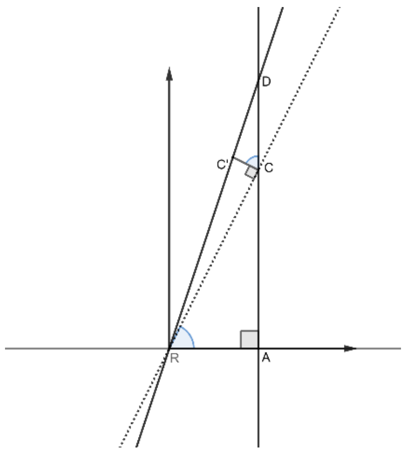


Certo dia, o robô foi enviado para o centro de distribuição D, porém, seu operador identificou rapidamente um erro, já que o objeto desejado estava guardado em C. Esse operador então emitiu um comando para que o robô mudasse sua trajetória da seguinte forma:

Seguir sobre a reta $y = 3x$ até um ponto C' tal que $C'C$ seja perpendicular a reta $y = 2x$. Seguir na direção $C'C$.

Para isso ser possível, determine a tangente do ângulo $\angle C'CD$.

2
3
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
7



<u>Solução</u>:

$\angle C'CD$ e $\angle RCA$ são complementares.
$\angle RCA$ e $\angle CRA$ são complementares.
Logo, $\angle C'CD = \angle CRA$, donde

$\tan \angle C'CD = \tan \angle CRA = 2$

Uma vez que $\overleftrightarrow{RC}$ é representada por $y = 2x$.

Um robô autônomo foi programado para fazer uma varredura em uma área de difícil acesso. Se o chão dessa área fosse uniforme, poderíamos representá-lo através da reta $y = 0$ (ou seja, o robô se deslocaria livremente sobre esta reta). Porém, o chão possuí algumas deformidades (crateras), uma delas em formato de parábola descrito pela função $y = x^2 - 4$, conforme a figura abaixo.

Enquanto se desloca, o robô mantém velocidade constante de $5\ \mathrm{m/s}$. Assim, se seus sensores não detectarem a presença desta cratera, após ele passar pelo ponto $(-2, 0)$, ele seguirá uma trajetória na sua queda que pode ser descrita pelas seguintes equações horárias, onde t é o tempo transcorrido a partir do momento que ele adentra a cratera:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -5t^2 \end{cases}$$

Determine a área do triângulo formado pelos pontos que estão na entrada da cratera e pelo ponto onde o robô atingirá o solo ao cair dentro dela.

$\frac{80}{9}\ \mathrm{m}^2$
$\frac{40}{9}\ \mathrm{m}^2$
$\frac{20}{9}\ \mathrm{m}^2$
$8\ \mathrm{m}^2$
$4\ \mathrm{m}^2$

Solução: Tempo de queda

$$y = x^2 - 4 \Rightarrow -5t^2 = (-2 + 5t)^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5t^2 = 25t^2 - 20t \Rightarrow 30t^2 - 20t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}\ \mathrm{s}$$

Substituindo nas equações horárias: $y = -5 \cdot \frac{4}{9} = -20/9$

Área do triângulo: $S = \frac{bh}{2} = 4 \cdot \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{9}\ \mathrm{m}^2$

Em um sistema de *blockchain*, cada bloco de dados é identificado por um *hash* único, que é gerado usando um algoritmo criptográfico. Esses *hashes* são fundamentais para garantir a segurança e a integridade da rede. Suponha que um determinado *blockchain* utiliza um algoritmo que gera *hashes* de 8 caracteres, sendo 4 deles numéricos (algarismos de 0 até 9) e 4 deles alfabéticos (26 letras maiúsculas e 26 letras minúsculas disponíveis).

Qual o número de *hashes* possíveis para que todos os caracteres alfabéticos maiúsculos apareçam antes de todos os caracteres alfabéticos minúsculos, e que algarismos e letras apareçam alternados dento do *hash*?

Exemplos de *hashes* válidos: A0Z0C8d1, 1B5a3u4b, C2E0C5D3

$26^4 \times 10^5$
$26^4 \times 10^4$
$2 \times 26^4 \times 10^4$
$2 \times 52^4 \times 10^4$
$52^4 \times 10^5$

Solução:
I. Para a posição das letras e dos números, temos, LNLNLNLN ou NLNLNLNL
2 possibilidades

II. Para a escolha dos números, temos,
10^4 possibilidades

III. Para a escolha dos algarismos temos:
Seja k o número de letras maiúsculas, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, teremos $4 - k$ letras minúsculas
Na escolha das letras: $26^k \times 26^{4-k} = 26^4$. Como temos 5 possíveis valores de k, temos,
5×26^4 possibilidades

Total de *hashes*: $2 \times 10^4 \times 5 \times 26^4 = 26^4 \times 10^5$

Um pixel é uma unidade de uma imagem digital que representa um ponto de cor. Essa cor pode ser retratada usando diferentes formatos, sendo o mais comum o RGB, que indica proporções das cores vermelha (R), verde (G) e azul (B). Um pixel, então, pode ser ter sua cor apresentada como uma matriz 1×3, como abaixo:

$$\text{pixel} = [R \quad G \quad B]$$

Cada elemento da matriz é um número que varia entre 0 e 255. Portanto, um pixel de cor $[255 \quad 0 \quad 0]$ possui o máximo possível de vermelho e nenhum componente de verde ou azul. Um pixel de cor $[0 \quad 0 \quad 0]$ não possui nenhum componente de cor, ou seja, está na cor preta. Já um pixel de cor $[255 \quad 255 \quad 255]$ possui o máximo dos três componentes, aparecendo como branco no computador.

Um uso bem comum em aplicativos de edição de imagem é o de filtros para intensificar determinadas cores. Os filtros são matrizes numéricas 3×3, que são aplicados a cada um dos pixels de uma imagem para gerar o resultado com o efeito desejado. Ou seja:

$$\text{novo\_pixel} = \text{pixel} \times \text{filtro}$$

Considere agora que você está desenvolvendo um novo filtro para uma rede social de imagens, que deve tornar a imagem mais quente. Imagens mais quentes possuem os componentes vermelho e verde mais acentuados (ou seja, maiores), enquanto o componente azul é mantido igual.

Dentre as opções abaixo, qual poderia ser usado para cumprir o objetivo do filtro?

$$\begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}0 & 0{,}5 & 1{,}3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

Solução: Seja $\text{novo\_pixel} = [R' \quad G' \quad B'] = [R \quad G \quad B] \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

$$[R' \; G' \; B'] = [R \quad G \quad B] \times \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix} = [1{,}3R + 0{,}1B \quad 0{,}1R + 1{,}3G \quad B]$$

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

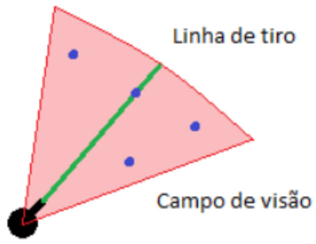
Nesse caso, $R' = 1{,}3R + 0{,}1B > R$; $G' = 0{,}1R + 1{,}3G > G$; $B' = B$ (satisfaz o enunciado)

Com a matriz $\begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}0 & 0{,}5 & 1{,}3 \end{bmatrix}$, teríamos $B' \neq B$.

Com a matriz $\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$, teríamos $R' < R$.

Com a matriz $\begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$, teríamos $R' = R$.

Com a matriz $\begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix}$, teríamos $B' \neq B$.



Sua equipe está desenvolvendo um novo jogo de tiro em $2D$ em que o jogador só consegue enxergar o que o seu personagem enxergaria. Portanto, o jogo deve renderizar apenas os elementos de coordenadas $(x,\ y)$ que satisfizerem as seguintes condições:

- O elemento se encontra sobre ou dentro de uma circunferência C_1 de raio 5, com centro no personagem;

- O elemento está dentro do campo de visão do personagem, região formada por duas semirretas que se originam no personagem e possuem um ângulo de 30 graus entre si.

Um outro elemento importante no jogo é a linha de tiro do personagem. A linha de tiro é formada pela bissetriz das duas semirretas que compõem o seu campo de visão.

Em um dado momento do jogo, o personagem está posicionado nas coordenadas $(3,\ 2)$. A linha de tiro é dada pela equação $x - y - 1 = 0$ (apontando para o primeiro quadrante de C_1). Sabendo que as alternativas abaixo correspondem a diferentes elementos do jogo, marque aquele que deve ser renderizado.

$(3, 8)$
$(-1, 1)$
$(6, 5)$
$(4, -2)$
$(8, 6)$

Solução: Como a linha de tiro aponta para o primeiro quadrante de C_1, o campo de visão do personagem deve ter $x > 3$ e $y > 2$. Assim, apenas os pontos $(3, 8)$, $(6, 5)$ e $(8,6)$ são possíveis de serem renderizados.

Note que a linha de tiro tem equação $y = x - 1$, ou seja, seu coeficiente angular é 1, portanto sua inclinação é 45^o. Como as retas que definem essa bissetriz possuem um ângulo de 30^o, devemos ter um ângulo de 15^o para cada semiplano definido pela bissetriz.

Assim, as inclinações dessas retas devem ser $45^o - 15^o = 30^o$ e $45^o + 15^o = 60^o$, ou seja, seus coeficientes angulares são $m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $m_2 = \sqrt{3}$.

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Como as retas passam pelo ponto $(3, 2)$, usando a equação rápida da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \colon y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) + 2 \text{ e } r_2 \colon y = \sqrt{3}(x-3) + 2;$$

Os pontos renderizados devem estar "acima" de r_1 e "abaixo" de r_2

Ponto (3,8):

Para $x = 3$: $r_2 \colon y = 2 < 8$ (ponto $(3, 8)$ acima de r_2, não renderizado)

Ponto $(6, 5)$:

Para $x = 6$: $r_1 \colon y = 2 + \sqrt{3} < 5$ e $y = 2 + 3\sqrt{3} > 5$ (ponto $(6, 5)$ acima de r_1 e abaixo de r_2)

Ponto (8,6):

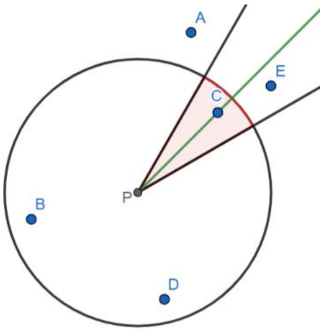
Para $x = 8$: $r_1 \colon y = \frac{5\sqrt{3}}{3} + 2 < 6$ e $y = 5\sqrt{3} + 2 > 6$ (ponto $(8, 6)$ acima de r_1 e abaixo de r_2)

Assim, os únicos pontos possíveis são $(6, 5)$ e $(8, 6)$. Calculando a distância até $(3, 2)$:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Ponto $(6, 5)$: $d = \sqrt{(6-3)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2} < 5$

Ponto $(8, 6)$: $d = \sqrt{(8-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{41} > 5$



Ou seja, o único ponto renderizado será $(6, 5)$.

Observação: Um desenho cuidadoso, ajudaria a resolver o problema e assinalar a alternativa correta sem a formalização apresentada na solução acima.

Um **índice de ações**, como o Ibovespa, é um índice que mede o desempenho de um determinado conjunto ou subconjunto de ações negociadas em bolsa de valores. Os índices de ações são utilizados como base para apoiar investidores na análise de preços de mercado, sendo parte do processo de tomada de decisão com relação a compra e venda de ativos. O gráfico abaixo representa, por exemplo, a variação do índice IBOVESPA.

Se for considerado um tempo suficientemente longo, esse tipo de gráfico pode ser aproximado por polinômios, bastando o grau $\boldsymbol{n}$ ser suficientemente grande, possibilitando algumas análises rápidas.

Suponha um índice fictício INTL, se comporta ao longo do tempo conforme o polinômio abaixo:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 42,$$

onde x é o tempo transcorrido, em anos, após o início da medição do índice.

A partir dessa informação, é possível afirmar que o número de vezes que o índice atinge o marco de 50 pontos entre o primeiro e o quinto ano de medição é de:

0
1
2
3
4

Solução: Como queremos que o índice seja 50, devemos ter $P(x) = 50$

$$x^3 + 3x^2 - 6x + 42 = 50 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

Testando $x = -1$ é solução. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini para abaixar o grau

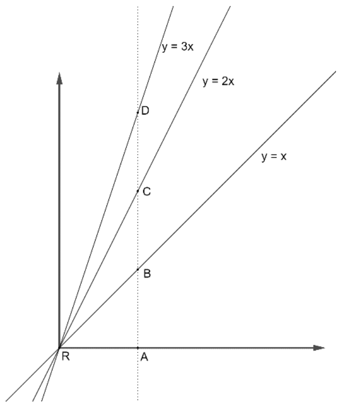
	1	3	-6	-8
-1	1	2	-8	0

Assim, as outras raízes são zeros de $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4$ ou $x = 2$
Como x é o tempo após o início da medição do índice, devemos ter $x > 0$.
Assim, $x = 2$ (uma solução)

Uma empresa de logística programou um robô para que ele buscasse objetos do dia a dia em quatro centros de distribuição que se encontram sobre a mesma reta $x = k$ (constante). O robô está configurado de modo que sua direção inicial já aponta para o centro de distribuição A, situada sobre a reta $y = 0$.

Caso o robô tenha que buscar algum objeto no centro de distribuição B ele andará sobre a reta $y = x$, para o centro de distribuição C ele andará sobre a reta $y = 2x$ e para o D sobre a reta $y = 3x$. Considere que o robô se encontra na origem desse sistema de coordenadas.

A figura abaixo ilustra a situação descrita por essa empresa de logística:



Determine a tangente do ângulo entre as trajetórias até os centros de distribuição C e B, ou seja, a tangente de $\angle CRB$

2

3

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

7

<u>Solução</u>: Vamos usar a fórmula de tangente da soma ou da diferença

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta} \text{ (considerando as condições de existência)}$$

No problema, $\tan \angle BRA = 1$ ($\overleftrightarrow{RB}$ é a reta $y = x$) e $\tan \angle CRA = 2$ ($\overleftrightarrow{RC}$ é a reta $y = 2x$).

$$\angle CRB = \angle CRA - \angle BRA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \angle CRB = \frac{\tan \angle CRA - \tan \angle BRA}{1 + \tan \angle CRA \cdot \tan \angle BRA} = \frac{2-1}{1+2\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Um robô autônomo foi programado para fazer uma varredura em uma área de difícil acesso. Se o chão dessa área fosse uniforme, poderíamos representá-lo através da reta $y = 0$ (ou seja, o robô se deslocaria livremente sobre esta reta). Porém, o chão possuí algumas deformidades (crateras), uma delas em formato de parábola descrito pela função $y = x^2 - 4$, conforme a figura abaixo.

Enquanto se desloca, o robô mantém velocidade constante de módulo V_x m/s, com $V_x < 2$. Assim, se seus sensores não detectarem a presença desta cratera, após ele passar pelo ponto $(-2, 0)$, ele seguirá uma trajetória na sua queda que pode ser descrita pelas seguintes equações horárias, onde t é o tempo transcorrido a partir do momento que ele adentra a cratera:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -5t^2 \end{cases}$$

Para que o robô não quebre é necessário que ele não caia de uma altura superior a $\frac{20}{9}$ m.

Determine o maior valor possível para V_x em m/s:

2
1,5
1
0,5
0,1

<u>Solução</u>: Calculando o tempo de queda

$$y = x^2 - 4 \Rightarrow -5t^2 = (-2 + V_x t)^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5t^2 = V_x^2 t^2 - 4V_x t \Rightarrow t((V_x^2 + 5)t - 4V_x) = 0 \Rightarrow t = \frac{4V_x}{V_x^2 + 5} \text{ s}$$

Substituindo nas equações horárias: $y = -5 \cdot \frac{16V_x^2}{(V_x^2+5)^2} = -\frac{80V_x^2}{(V_x^2+5)^2}$

Usando a restrição da altura máxima (lembrando que V_x é o módulo da velocidade):

$$\frac{80V_x^2}{(V_x^2 + 5)^2} \leq \frac{20}{9} \Rightarrow \frac{V_x^2}{(V_x^2 + 5)^2} \leq \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{V_x}{V_x^2 + 5} \leq \frac{1}{6} \Rightarrow V_x^2 - 6V_x + 5 \geq 0 \Rightarrow V_x \leq 1 \text{ ou } V_x \geq 5$$

Como $V_x < 2$, segue que $V_{x_{MÁX}} = 1 \text{ m/s}$.

Em um sistema de *blockchain*, cada bloco de dados é identificado por um *hash* único, que é gerado usando um algoritmo criptográfico. Esses *hashes* são fundamentais para garantir a segurança e a integridade da rede. Suponha que um determinado *blockchain* utiliza um algoritmo que gera *hashes* de 8 caracteres, sendo 4 deles numéricos (algarismos de 0 até 9) e 4 deles alfabéticos (26 letras maiúsculas e 26 letras minúsculas disponíveis).

Qual o número de *hashes* possíveis para que todos os caracteres numéricos sejam distintos e apareçam em ordem crescente?

Observação: Uma sequência é dita crescente quando cada termo é maior que o termo anterior da sequência.

Exemplos de *hashes* válidos: AZ01C8d9, B15a8u9b, C0E1C6D7

14.700×52^4
70×52^4
210×52^4
$10^4 \times 52^4$
1.440×52^4

Solução:

I. Escolha da posição dos caracteres: $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$

II. Escolha dos algarismos: $C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = 210$

III. Ordem dos algarismos: 1 (ordem crescente)

IV. Letras: 52^4

Total de *hashes*: $70 \times 210 \times 52^4 = 14.700 \times 52^4$

Um pixel é uma unidade de uma imagem digital que representa um ponto de cor. Essa cor pode ser retratada usando diferentes formatos, sendo o mais comum o RGB, que indica proporções das cores vermelha (R), verde (G) e azul (B). Um pixel, então, pode ser ter sua cor apresentada como uma matriz 1×3, como abaixo:

$$\text{pixel} = [R \quad G \quad B]$$

Cada elemento da matriz é um número que varia entre 0 e 255. Portanto, um pixel de cor $[255 \quad 0 \quad 0]$ possui o máximo possível de vermelho e nenhum componente de verde ou azul. Um pixel de cor $[0 \quad 0 \quad 0]$ não possui nenhum componente de cor, ou seja, está na cor preta. Já um pixel de cor $[255 \quad 255 \quad 255]$ possui o máximo dos três componentes, aparecendo como branco no computador.

No entanto, o **RGB** não é o único formato de representação das cores. Um outro existente, amplamente utilizado em processamento de vídeo, é o **YUV**, correspondente a luminância (Y), crominância azul (U) e crominância vermelha (V).

Para converter um pixel no formato RGB para YUV, aplica-se uma matriz de transformação, indicada abaixo:

$$YUV = RGB \times \begin{bmatrix} 0{,}299 & -0{,}147 & 0{,}615 \\ 0{,}577 & -0{,}289 & -0{,}515 \\ 0{,}124 & 0{,}436 & -0{,}100 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz de transformação acima, qual seriam as representações de um pixel preto (RGB $[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$) e branco (RGB $[\mathbf{255} \quad \mathbf{255} \quad \mathbf{255}]$) no formato YUV?

preto: $[0{,}299 \quad -0{,}289 \quad -0{,}100]$; branco: $[255 \quad 255 \quad 255]$

preto: $[0 \quad 0 \quad 0]$; branco: $[1 \quad 0 \quad 0]$

preto: $[0 \quad 0 \quad 0]$; branco: $[255 \quad 0 \quad 0]$

preto: $[1 \quad 0 \quad 0]$; branco: $[0 \quad 0 \quad 0]$

preto: $[0 \quad 0 \quad 0]$; branco: $[196 \quad -55 \quad 122]$

Solução: Pixel preto

$$YUV = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0{,}299 & -0{,}147 & 0{,}615 \\ 0{,}577 & -0{,}289 & -0{,}515 \\ 0{,}124 & 0{,}436 & -0{,}100 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Pixel branco

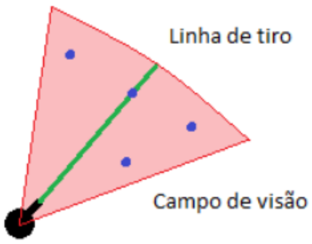
$$YUV = [255 \quad 255 \quad 255] \times \begin{bmatrix} 0{,}299 & -0{,}147 & 0{,}615 \\ 0{,}577 & -0{,}289 & -0{,}515 \\ 0{,}124 & 0{,}436 & -0{,}100 \end{bmatrix}$$

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

$$= 255 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}299 & -0{,}147 & 0{,}615 \\ 0{,}577 & -0{,}289 & -0{,}515 \\ 0{,}124 & 0{,}436 & -0{,}100 \end{bmatrix} =$$

$$= 255 \times \begin{bmatrix} 0{,}299 + 0{,}577 + 0{,}124 & -0{,}147 - 0{,}289 + 0{,}436 & 0{,}615 - 0{,}515 - 0{,}100 \end{bmatrix} =$$

$$= 255 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 255 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Sua equipe está desenvolvendo um novo jogo de tiro em $2D$ em que o jogador só consegue enxergar o que o seu personagem enxergaria. Portanto, o jogo deve renderizar apenas os elementos de coordenadas $(x,\ y)$ que satisfizerem as seguintes condições:

- O elemento se encontra sobre ou dentro de uma circunferência C_1 de raio 5, com centro no personagem;

- O elemento está dentro do campo de visão do personagem, região formada por duas semirretas que se originam no personagem.

Um outro elemento importante no jogo é a linha de tiro do personagem. A linha de tiro é formada pela bissetriz das duas semirretas que compõem o seu campo de visão. Um personagem só consegue acertar um alvo se ele estiver na linha de tiro e dentro do alcance de visão do personagem.

Em um dado momento do jogo, o personagem está posicionado nas coordenadas $(3,\ 2)$ e as equações $y = \frac{4}{3}x - 2$ e $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ formam as semirretas do seu campo de visão (com a linha de tiro apontando para o primeiro quadrante de C_1).

Se o jogador der um comando para o personagem atirar neste momento, qual dos elementos abaixo poderá ser atingido?

$\left(5, \frac{3}{2}\right)$

$(7,6)$

$(4,3)$

$\left(6, \frac{9}{2}\right)$

$\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

Solução: Primeiro vamos reescrever as equações dadas.

$$r_1: y = \frac{4}{3}x - 2 \Rightarrow 4x - 3y - 6 = 0 \text{ e } r_2: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Para achar a bissetriz dessas equações lembre-se que qualquer ponto da bissetriz deve ter a mesma distância às duas retas que a definem. Assim, a equação das bissetrizes é dada por,

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$$

No problema,

$$\frac{|4x-3y-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|3x-4y-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-3y-6 = \pm(3x-4y-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-3y-6 = 3x-4y-1 \text{ ou } 4x-3y-6 = -3x+4y+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y = 5 \text{ ou } 7x-7y = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y = 5 \text{ ou } x-y = 1 \Rightarrow$$

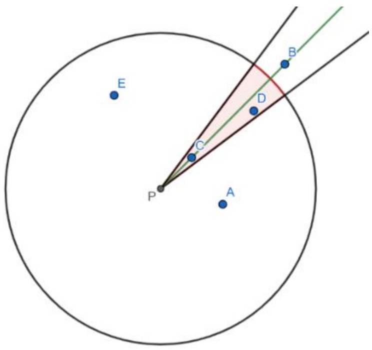
Como a linha de tiro está no primeiro quadrante de C_1 devemos ter $x-y=1$.

Das opções apenas os pontos $(7,6)$ e $(4,3)$ pertencem a linha de tiro. Calculando a distância até o ponto $(3,2)$

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

Ponto $(7,6)$: $d = \sqrt{(7-3)^2+(6-2)^2} = 4\sqrt{2} > 5$

Ponto $(4,3)$: $d = \sqrt{(4-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{2} < 5$



Ou seja, o único ponto atingido é o ponto $(4,3)$.

Solução 2: Note que como $m_1 = \frac{4}{3}$ e $m_2 = \frac{3}{4}$, a inclinação das retas r_1 e r_2 são complementares. De fato, sendo α_1 e α_2 as inclinações, temos

$$\tan\alpha_1 = \operatorname{cotan}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

O ângulo entre as retas é $\alpha_1-\alpha_2$, assim o ângulo entre a bissetriz e a reta r_2 será $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$. Assim, a inclinação da bissetriz será

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m_b = 1 \Rightarrow \text{bissetriz: } y = x+q$$

Como a bissetriz passa pelo ponto $(3,2)$: $y = x-1$. Novamente bastaria verificar as opções $(7,6)$ e $(4,3)$

Um **índice de ações**, como o Ibovespa, é um índice que mede o desempenho de um determinado conjunto ou subconjunto de ações negociadas em bolsa de valores. Os índices de ações são utilizados como base para apoiar investidores na análise de preços de mercado, sendo parte do processo de tomada de decisão com relação a compra e venda de ativos. O gráfico abaixo representa, por exemplo, a variação do índice IBOVESPA.

Se for considerado um tempo suficientemente longo, esse tipo de gráfico pode ser aproximado por polinômios, bastando o grau $\boldsymbol{n}$ ser suficientemente grande, possibilitando algumas análises rápidas.

Suponha um índice fictício INTL, se comporta ao longo do tempo conforme o polinômio abaixo:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 62,$$

onde x é o tempo transcorrido, em anos, após o início da medição do índice.

A partir dessa informação, é possível afirmar que o número de vezes que o índice atinge o marco de 50 pontos entre o primeiro e o quinto ano de medição é de:

0
1
2
3
4

<u>Solução</u>: Como queremos que o índice seja 50, devemos ter $P(x) = 50$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 62 = 50 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$$

Testando $x = -1$ é solução. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini para abaixar o grau

	1	-2	-7	8	12
-1	1	-3	-4	12	0

Assim, as outras raízes são zeros de

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) - 4(x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x^2-4) = 0$$

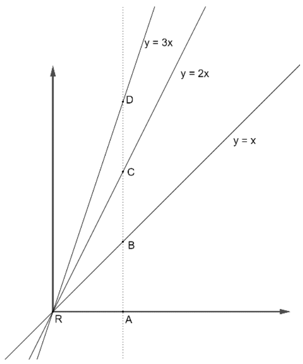
$$\Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \pm 2$$

Como x é o tempo após o início da medição do índice, devemos ter $x > 0$.
Assim, $x = 2$ ou $x = 3$ (duas soluções)

Uma empresa de logística programou um robô para que ele buscasse objetos do dia a dia em quatro centros de distribuição que se encontram sobre a mesma reta $x = k$ (constante). O robô está configurado para que sua direção inicial já aponte para o centro de distribuição A, situada sobre a reta $y = 0$.

Caso o robô tenha que buscar algum objeto no centro de distribuição B ele andará sobre a reta $y = x$, para o centro de distribuição C ele andará sobre a reta $y = 2x$ e para o D sobre a reta $y = 3x$. Considere que o robô se encontra na origem desse sistema de coordenadas.

A figura abaixo ilustra a situação descrita por essa empresa de logística:



Certo dia, o robô foi enviado para o centro de distribuição D. Porém, seu operador identificou rapidamente um erro, já que o objeto desejado estava guardado em A. Esse operador então emitiu um comando para que o robô mudasse sua trajetória da seguinte forma:

Seguir sobre a reta $y = 3x$ até um ponto A' tal que $A'A$ seja perpendicular a reta $y = 2x$. Seguir na direção $A'A$.

Para isso ser possível, determine a tangente do ângulo $\angle RA'A$.

2

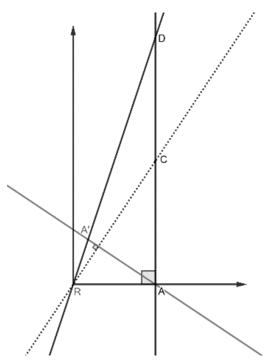
3

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

7

<u>Solução</u>: Note que $\tan \angle DRA = 3$ ($\overleftrightarrow{RD}$ é a reta $y = 3x$) e $\tan \angle CRA = 2$ ($\overleftrightarrow{RC}$ é a reta $y = 2x$)



$$\angle DRC = \angle DRA - \angle CRA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \angle DRC = \frac{\tan \angle DRA - \tan \angle CRA}{1 + \tan \angle DRA \cdot \tan \angle CRA} = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7}$$

$\angle RA'A$ e $\angle DRC$ são complementares, portanto, $\tan \angle RA'A = 7$

Um robô autônomo foi programado para fazer uma varredura em uma área de difícil acesso. Se o chão dessa área fosse uniforme, poderíamos representá-lo através da reta $y = 0$ (ou seja, o robô se deslocaria livremente sobre esta reta). Porém, o chão possuí algumas deformidades, uma delas em formato de parábola descrito pela função $y = x^2 - \frac{3}{16}$, conforme a figura abaixo.

Enquanto se desloca, o robô mantém velocidade constante de módulo V_x m/s. Assim, se seus sensores não detectarem a presença desta deformidade, após ele passar pelo ponto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$, ele seguirá uma trajetória na sua queda que pode ser descrita pelas seguintes equações horárias, onde t é o tempo transcorrido a partir do momento que ele adentra a deformação:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + V_x \cdot t \\ y = -5t^2 \end{cases}$$

Essas equações são obtidas considerando que, no eixo x, desprezando a resistência do ar, teremos um movimento uniforme (velocidade na direção x constante) e que, no eixo y, considerando apenas a ação da gravidade, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, teremos um movimento uniformemente variado (velocidade na direção y variável com módulo igual a gt)

Para que o robô não quebre é necessário que, ao se chocar com o solo no interior da deformação, sua velocidade resultante seja no máximo $\sqrt{10}$ m/s. Determine o maior valor possível para V_x em m/s.

$\sqrt[6]{250}$ m/s
2 m/s
$\sqrt{10}$ m/s
1 m/s
$\sqrt[3]{5}$ m/s

Solução:
CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Tempo de queda:

$$y = x^2 - \frac{3}{16} \Rightarrow -5t^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + V_x t\right)^2 - \frac{3}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5t^2 = V_x^2 t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} V_x t \Rightarrow t\left((V_x^2 + 5)t - \frac{\sqrt{3}}{2} V_x\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}/2 \cdot V_x}{V_x^2 + 5} \text{ s}$$

Componentes da velocidade quando o choque ocorrer: V_x e $V_y = gt = \frac{5\sqrt{3}V_x}{V_x^2+5}$

Velocidade resultante: $V^2 = V_x^2 + V_y^2 = V_x^2 + \frac{75V_x^2}{\left(V_x^2+5\right)^2} \leq 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_x^6 + 10V_x^4 + 25V_x^2 + 75V_x^2 \leq 10V_x^4 + 100V_x^2 + 250 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x \leq \sqrt[6]{250}$$

Em um sistema de *blockchain*, cada bloco de dados é identificado por um *hash* único, que é gerado usando um algoritmo criptográfico. Esses *hashes* são fundamentais para garantir a segurança e a integridade da rede. Suponha que um determinado *blockchain* utiliza um algoritmo que gera *hashes* de 8 caracteres, sendo todos os caracteres um algarismo de 0 até 9.

Qual o número de *hashes* possíveis em que todos os caracteres aparecem em ordem não decrescente?

Observação: Dizemos que uma sequência é não decrescente quando cada termo da sequência é maior ou igual ao termo imediatamente anterior.

Exemplos de *hashes* válidos: 00123345, 23456789, 22222222

6.400
12.870
14.550
16.280
24.310

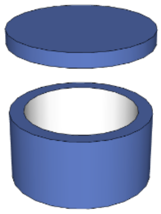
Solução: Basta definir quantas vezes aparece cada algarismo, uma vez que a ordem já está definida. Seja x_i a quantidade de vezes que o algarismo i aparece no *hash*, temos,

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 8$$

O número de soluções inteiras não-negativas dessa equação é: $P_{17}^{9,8} = \frac{17!}{9!8!} = 24.310$

Sua empresa desenvolveu um protótipo para um novo sistema embarcado utilizando o microcontrolador Arduino. Para distribuir versões de teste desse protótipo para clientes selecionados, você recebeu a responsabilidade de desenvolver um *case* para acomodar todo o equipamento. Esse *case* será impresso em 3D utilizando um filamento ABS de densidade $1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$.

O *case* é formado por dois elementos independentes entre si: a parte de baixo é um cilindro oco de raio externo $5\ \mathrm{cm}$, altura externa $5\ \mathrm{cm}$ e $1\ \mathrm{cm}$ de espessura (lateral). Já a parte de cima, tampa, é um cilindro maciço, de raio $5\ \mathrm{cm}$ e $1\ \mathrm{cm}$ de altura. Considere a espessura da base do cilindro oco desprezível. A figura abaixo representa o *case*.



O custo de um rolo de $1\ \mathrm{kg}$ de filamento ABS é de aproximadamente $\mathrm{R\$}\ 50{,}00$ e o processo de produção possui uma perda de material de 10%.

Qual é, aproximadamente, o custo estimado para a impressão bem-sucedida de 100 *cases*?

Considere $\pi \cong 3{,}14$

R\$ 420
R\$ 1.186
R\$ 1.318
R\$ 1.562
R\$ 1.675

Solução: Volume do cilindro oco:

$$V = A_o \times h_o = \pi(R_o^2 - r_o^2)h = 5\pi(25 - 16) = 45\pi$$

Volume da tampa

$$V_{tampa} = A_t \times h_t = \pi R_t^2 h_t = \pi \times 25 \times 1 = 25\pi$$

Volume total: $V_T = 70\pi$

Como, $d = 1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$, então $\mathrm{massa_{sólido}} = 1{,}08 \times 70\pi\ \mathrm{g}$.

Considerando que existe 10% de perda de material:

$$\mathrm{m_{Total\ (um\ case)}} = \frac{1{,}08 \times 70\pi}{0{,}9} = 84\pi\ \mathrm{g}$$

Para 100 cases,

$$\mathrm{m_{Final}} = 8.400\pi\ \mathrm{g} = 8{,}4\pi\ \mathrm{kg}$$

Como o custo é R\$ 50,00 / kg,

$$C = 50 \times 8{,}4\pi = 420\pi = \mathrm{R\$}\ 1318{,}80$$

Um dos modelos mais comuns utilizados em Aprendizado de Máquina, chamado **Naive Bayes**, envolve um teorema probabilístico chamado **Teorema de Bayes**. Este teorema utiliza um conceito chamado **probabilidade condicional**, ou P(A|B), *probabilidade de A dado B*, que mede a probabilidade de um evento A acontecer, dado que um evento B ocorreu.

Por exemplo, considere as 52 cartas de um baralho de quatro naipes, composto pelas cartas $\text{Ás}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, além das cartas figuradas Valete, Dama e Rei. Em um baralho embaralhado aleatoriamente, a probabilidade de se obter uma carta Valete é:

$$P(\text{valete}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Por outro lado, a probabilidade de se obter uma carta Valete, sabendo que a carta tirada é uma carta figurada, é igual a:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Observe que, no segundo cálculo, a população usada para calcular a probabilidade é 12, uma vez que existem 12 cartas figuradas no baralho.

Considere, por exemplo, um cenário em que você está desenvolvendo um modelo Naive Bayes para um projeto de detecção de *spam* em uma caixa de mensagens de um novo aplicativo. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo que retorna positivo, **P**, caso uma nova mensagem seja *spam*, negativo, **N**, caso a mensagem não seja *spam*, e inconclusivo, **I**, caso o algoritmo não consiga chegar a um resultado. Você aplicou o algoritmo em uma série de mensagens e obteve os seguintes resultados para diferentes características que a mensagem poderia ter:

Resultado	***spam***	**não *spam***	**Total**
Positivo	80	40	120
Negativo	10	100	110
Inconclusivo	10	60	70
Total	100	200	300

Você submete uma nova mensagem, e este retornou Negativo. Qual seria a probabilidade de a mensagem ser um *spam*?

0,080
0,091
0,100
0,111
0,201

Solução: Na tabela, basta se restringir a linha Negativo. Nessa linha, 10 são *spam*, ou seja,

$$P(spam|-) = \frac{1}{11} \cong 0{,}091$$

O prédio de pesquisa e desenvolvimento (C_1) de uma certa empresa tem formato circular e centro em O, podendo ser descrito pela equação $x^2 + y^2 = 16$. No centro deste prédio encontra-se o laboratório (C_2), sendo descrito pela equação $x^2 + y^2 = 1$

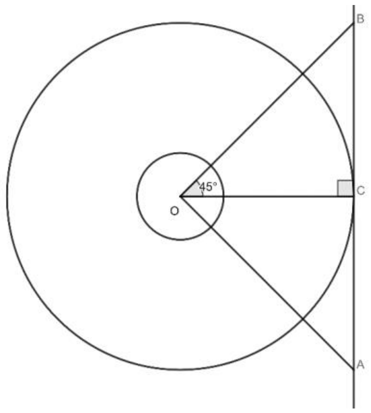
Uma estrada (t) de acesso foi construída externamente ao prédio, sendo tangente ao mesmo no ponto $C(4,0)$.

A partir do centro administrativo da empresa, localizado em O, traçam-se duas rotas de acesso, de equações $y = x$ e $y = -x$. Essas rotas, se prolongadas, chegariam na estrada nos pontos A e B.

Determine a área delimitada pelo triângulo OAB externa ao laboratório C_2.

$4 - \frac{\pi}{4}$
$8 - \frac{\pi}{2}$
$16 - \frac{\pi}{4}$
$16 - \pi$
$8 - \frac{\pi}{2}$

Solução: A figura abaixo representa a situação descrita no problema



Na reta $y = x$ o coeficiente angular é 1, portanto $\angle BOC = 45°$. Donde,

$$CB = OC = 4 \Rightarrow AB = 2 \cdot OC = 8 \Rightarrow S_\Delta = \frac{OC \cdot AB}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

A área pedida é, $S = S_\Delta - \frac{S_{c_2}}{4} = 16 - \frac{\pi}{4}$

Com o avanço dos *softwares* de IA, muito se tem discutido sobre o ensino de matemática na educação básica. O debate passa pelo tempo dispensado no ensino de cálculos e resolução de equações, quando atualmente, já existem ferramentas e modelos que fazem essas funções melhores do que um ser humano. (*The Math is fix* – Wolfram, Conrad)

Com a existência dessas ferramentas, entende-se que a discussão poderia ser mais crítica e menos mecânica. Por exemplo, como garantir que existe alguma solução, ou seja, que a ferramenta vai gerar uma resposta para o problema? Como estimar o tamanho da solução para interpretar se a solução dada é coerente?

Considere, por exemplo, a equação abaixo

$$|\log(3x)| + x = 0$$

Resolver esse tipo de equação de forma analítica, tentando "isolar" o x, não faria sentido dada a complexidade da equação. Sendo assim, o que podemos afirmar sobre esta equação?

Obs: $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10.

Opções:

Não existe solução real
Existe exatamente uma solução real
Existem exatamente duas soluções reais
Existem exatamente 6 soluções reais
Existem infinitas soluções reais

Solução:

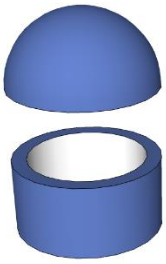
Pela condição de existência de logaritmos, $x > 0$. Como $|\log(3x)| \geq 0$, temos

$$|\log(3x)| + x > 0$$

Logo, não existe solução real para a equação

Sua empresa desenvolveu um protótipo para um novo sistema embarcado utilizando o microcontrolador Arduino. Para distribuir versões de teste desse protótipo para clientes selecionados, você recebeu a responsabilidade de desenvolver um *case* para acomodar todo o equipamento. Esse *case* será impresso em 3D utilizando um filamento ABS de densidade $1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$.

O *case* é formado por dois elementos independentes entre si: a parte de baixo é um cilindro oco de raio externo $5\ \mathrm{cm}$, altura externa $5\ \mathrm{cm}$ e $1\ \mathrm{cm}$ de espessura (lateral). Já a parte de cima, uma "tampa" decorativa, é uma semiesfera maciça de raio $5\ \mathrm{cm}$. Considere a espessura da base do cilindro desprezível. A figura abaixo representa o *case*.



O custo de um rolo de $1\ \mathrm{kg}$ de filamento ABS é de aproximadamente R\$ 50,00 e o processo de produção possui uma perda de material de 10%.

Qual é, aproximadamente, o custo estimado para a impressão bem-sucedida de 100 *cases*?

Considere $\pi \cong 3{,}14$

R$ 2.417
R$ 2.176
R$ 1.879
R$ 1.675
R$ 1.438

Solução: Volume do cilindro oco:

$$V = A_b \times h = \pi(R^2 - r^2)h = 5\pi(25 - 16) = 45\pi$$

Volume da tampa

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \times 125 = \frac{250\pi}{3}$$

Volume total:

$$V_T = \frac{250\pi}{3} + 45\pi = \frac{385\pi}{3}$$

Como, $d = 1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$, então $\text{massa}_{\text{sólido}} = 1{,}08 \times \frac{385\pi}{3}\ \mathrm{g}$.

Considerando que existe 10% de perda de material:

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

$$\mathrm{m}_{\text{Total (um case)}} = \frac{1{,}08 \times \frac{385\pi}{3}}{0{,}9} = 154\pi\ \mathrm{g}$$

Para 100 cases,

$$\mathrm{m}_{\text{Final}} = 15.400\pi\ \mathrm{g} = 15{,}4\pi\ \mathrm{kg}$$

Como o custo é R\$ 50,00 / kg,

$$C = 50 \times 15{,}4\pi = 770\pi = \text{R\$ } 2.417{,}80$$

Um dos modelos mais comuns utilizados em Aprendizado de Máquina, chamado **Naive Bayes**, envolve um teorema probabilístico chamado **Teorema de Bayes**. Este teorema utiliza um conceito chamado **probabilidade condicional**, ou P(A|B), *probabilidade de A dado B*, que mede a probabilidade de um evento A acontecer, dado que um evento B ocorreu.

Por exemplo, considere as 52 cartas de um baralho de quatro naipes, composto pelas cartas $\text{Ás}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, além das cartas figuradas Valete, Dama e Rei. Em um baralho embaralhado aleatoriamente, a probabilidade de se obter uma carta Valete é:

$$P(\text{valete}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Por outro lado, a probabilidade de se obter uma carta Valete, sabendo que a carta tirada é uma carta figurada, é igual a:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Observe que, no segundo cálculo, a população usada para calcular a probabilidade é 12, uma vez que existem 12 cartas figuradas no baralho. O Teorema de Bayes é uma forma alternativa de se calcular uma probabilidade condicional, quando nem todas as informações estão disponíveis. Dados dois eventos A e B, é possível calcular P(A|B) da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Dessa forma, nosso exemplo anterior poderia ser calculado da seguinte forma:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{P(\text{figurada}|\text{valete}) \times P(\text{valete})}{P(\text{figurada})} = \frac{1 \times \frac{4}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Neste exemplo, o cálculo da probabilidade condicional é direto, uma vez que a relação causa e efeito entre os dois eventos é facilmente observável. No entanto, quando lidamos com problemas de Aprendizado de Máquina, essa relação nem sempre fica clara.

Considere, por exemplo, um cenário em que você está desenvolvendo um modelo Naive Bayes para um projeto de detecção de *spam* em uma caixa de mensagens de um novo aplicativo. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo que retorna positivo, **P**, caso ele classifque uma nova mensagem como *spam*, e negativo, **N**, caso contrário.

- Você testou mil diferentes mensagens;
- Dessas mil mensagens, você sabe que 15% eram *spam*;
- 80% das mensagens que eram *spam* receberam positivo no teste;
- 20% das mensagens que não eram *spam* receberam positivo no teste.

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Você submeteu uma nova mensagem ao algoritmo de análise e recebeu um resultado positivo. Qual é a probabilidade de a mensagem ser *spam*?

0,29
0,33
0,37
0,41
0,45

Solução:

$$P(\text{spam} \mid +) = \frac{P(+ \mid spam) \times P(\text{spam})}{P(+)} =$$

$$P(\text{spam} \mid +) = \frac{80\% \times 15\%}{80\% \times 15\% + 20\% \times (100 - 15)\%} = \frac{80 \times 15}{80 \times 15 + 20 \times 85} \cong 0{,}41$$

O prédio de pesquisa e desenvolvimento (C_1) de uma certa empresa tem formato circular e centro em O, podendo ser descrito pela equação $x^2 + y^2 = 16$. Dentro deste prédio encontra-se o laboratório (C_2), também em formato circular e centro C, sendo descrito pela equação $(x-3)^2 + y^2 = 1$

Uma estrada (t) de acesso foi construída externamente ao prédio, sendo tangente comum ao prédio e ao laboratório.

A partir do centro administrativo da empresa, localizado no centro do prédio de pesquisa e desenvolvimento, traçam-se duas rotas de acesso, tangentes ao laboratório. Essas rotas, se prolongadas, chegariam na estrada nos pontos A e B.

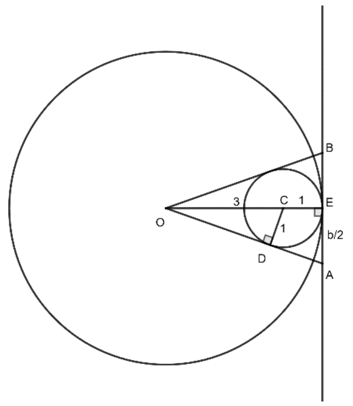
Determine a área delimitada pelo triângulo OAB.

$4\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$
2
4
$2\sqrt{3}$

Solução:

A figura abaixo representa a situação descrita no problema, pois, a distância entre os centros é

$$\sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3 = R - r$$



Seja D o ponto de tangência da reta AO em C_2 e E o ponto de tangência da reta t as duas circunferências. Marcando os ângulos vemos que $\Delta OCD \sim \Delta OAE$,

$$\frac{CD}{AE} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{1}{b/2} = \frac{3}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + 16}} \Rightarrow \frac{9b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + 16 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 4\sqrt{2}$$

Com o avanço dos *softwares* de IA, muito se tem discutido sobre o ensino de matemática na educação básica. O debate passa pelo tempo dispensado no ensino de cálculos e resolução de equações, quando atualmente, já existem ferramentas e modelos que fazem essas funções melhores do que um ser humano. (*The Math is fix* – Wolfram, Conrad)

Com a existência dessas ferramentas, entende-se que a discussão poderia ser mais crítica e menos mecânica. Por exemplo, como garantir que existe alguma solução, ou seja, que a ferramenta vai gerar uma resposta para o problema? Como estimar o tamanho da solução para interpretar se a solução dada é coerente?

Considere, por exemplo, a equação abaixo.

$$4^x + 2x = 13$$

Resolver esse tipo de equação de forma analítica, tentando "isolar" o x, não faria sentido dada a complexidade da equação.

Sendo assim, o que podemos afirmar sobre esta equação?

Opções:

Para $x = 1$, o lado esquerdo vale 6 e para $x = 2$, o lado esquerdo vale 20. Como 13 é uma média entre 6 e 20, $x = 1{,}5$ será uma solução da equação.

Toda função crescente e contínua "atinge" qualquer valor real, ou seja, é sobrejetora em $\mathbb{R}$. Então, independentemente do número do lado direito, e da função crescente e contínua no lado esquerdo, podemos garantir que existirá, sempre, pelo menos uma solução real.

Podemos afirmar que a equação possui uma única solução real, e esta solução está entre 1 e 2. Porém, é impossível determinar se esta solução está no intervalo $[1, 1.5)$ ou no intervalo $[1.5, 2]$.

A equação não possui nenhuma solução real, já que o lado esquerdo é par e o lado direito é ímpar.

O lado esquerdo é crescente e contínuo e o lado direito é constante. Além disso, substituindo alguns valores de x, vemos que a expressão do lado esquerdo "atinge" valores menores que 13 e maiores que 13, portanto, em algum momento, e uma única vez, o lado esquerdo será igual a 13.

Solução:

O lado esquerdo é a soma de uma função exponencial, com base maior que 1, com uma função afim, portanto é uma função contínua e crescente.

Note que para $x = 1$ o lado esquerdo vale 6 e para $x = 2$ vale 20, como a função é contínua, em algum momento valerá 13. Como a função é crescente e contínua isso ocorre uma única vez.

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Com isso, garantimos que a opção e é verdadeira e que a letra d é incorreta.

Para garantir que as outras opções são incorretas, coloque $x = 1{,}5$ no lado esquerdo, termos

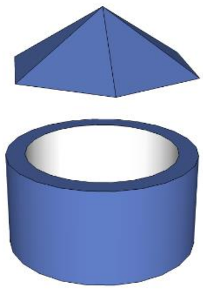
$$4^{1,5} + 2 \times 1{,}5 = 11$$

Isso mostra que a opção a está incorreta e que a raiz está entre $1{,}5$ e 2, ou seja, a letra c também é falsa.

A letra b é falsa pois uma função crescente e contínua pode ser, por exemplo, limitada superiormente, assim não seria sobrejetora. Um exemplo, $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$, nunca atinge valores reais não negativos.

Sua empresa desenvolveu um protótipo para um novo sistema embarcado utilizando o microcontrolador Arduino. Para distribuir versões de teste desse protótipo para clientes selecionados, você recebeu a responsabilidade de desenvolver um *case* para acomodar todo o equipamento. Esse *case* será impresso em 3D utilizando um filamento ABS de densidade $1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$.

O *case* é formado por dois elementos independentes entre si: a parte de baixo é um cilindro oco de raio externo 5 cm, altura externa 5 cm e 1 cm de espessura (lateral). Já a parte de cima, uma "tampa" decorativa, é uma pirâmide maciça, cuja base é um hexágono regular inscrito na circunferência de raio $5\ \mathrm{cm}$, e altura 3 cm. Considere a espessura da base do cilindro desprezível. A figura abaixo representa o *case*.



O custo de um rolo de $1\ \mathrm{kg}$ de filamento ABS é de aproximadamente R$ 50,00 e o processo de produção possui uma perda de material de 10%.

Qual é, aproximadamente, o custo estimado para a impressão bem-sucedida de 100 *cases*?

Considere $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ e $\pi \cong 3{,}14$

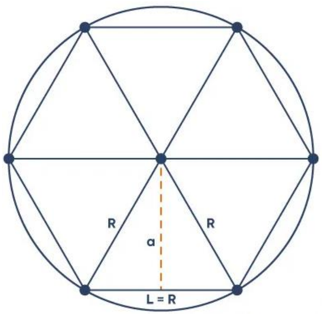
R$ 1.237
R$ 1.113
R$ 1.685
R$ 1.426
R$ 1.875

Solução: Volume do cilindro oco:

$$V = A_b \times h = \pi(R^2 - r^2)h = 5\pi(25 - 16) = 45\pi$$

Volume da tampa (lembrando que um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros)

$$V = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3} \times \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} \times 3 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$



Volume total:

$$V_T = \frac{75\sqrt{3}}{2} + 45\pi$$

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Como, $d = 1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$, então $\text{massa}_{\text{sólido}} = 1{,}08 \times \left(\frac{75\sqrt{3}}{2} + 45\pi\right)\ \mathrm{g}$.

Considerando que existe 10% de perda de material:

$$\mathrm{m}_{\text{Total (um case)}} = \frac{1{,}08 \times \left(\frac{75\sqrt{3}}{2} + 45\pi\right)}{0{,}9} = 45\sqrt{3} + 54\pi\ \mathrm{g}$$

Para 100 cases,

$$\mathrm{m}_{\text{Final}} = 100 \times \left(45\sqrt{3} + 54\pi\right)\mathrm{g} = 4{,}5\sqrt{3} + 5{,}4\pi\ \mathrm{kg}$$

Como o custo é R\$ 50,00 / kg,

$$C = 50 \times \left(4{,}5\sqrt{3} + 5{,}4\pi\right)\mathrm{kg} = 225\sqrt{3} + 270\pi = \text{R\$ 1.237,05}$$

Um dos modelos mais comuns utilizados em Aprendizado de Máquina, chamado **Naive Bayes**, envolve um teorema probabilístico chamado **Teorema de Bayes**. Este teorema utiliza um conceito chamado **probabilidade condicional**, ou P(A|B), *probabilidade de A dado B*, que mede a probabilidade de um evento A acontecer, dado que um evento B ocorreu.

Por exemplo, considere as 52 cartas de um baralho de quatro naipes, composto pelas cartas $\text{Ás}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, além das cartas figuradas Valete, Dama e Rei. Em um baralho embaralhado aleatoriamente, a probabilidade de se obter uma carta Valete é:

$$P(\text{valete}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Por outro lado, a probabilidade de se obter uma carta Valete, sabendo que a carta tirada é uma carta figurada, é igual a:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Observe que, no segundo cálculo, a população usada para calcular a probabilidade é 12, uma vez que existem 12 cartas figuradas no baralho. O Teorema de Bayes é uma forma alternativa de se calcular uma probabilidade condicional, quando nem todas as informações estão disponíveis. Dados dois eventos A e B, é possível calcular P(A|B) da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Dessa forma, nosso exemplo anterior poderia ser calculado da seguinte forma:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{P(\text{figurada}|\text{valete}) \times P(\text{valete})}{P(\text{figurada})} = \frac{1 \times \frac{4}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Neste exemplo, o cálculo da probabilidade condicional é direto, uma vez que a relação causa e efeito entre os dois eventos é facilmente observável. No entanto, quando lidamos com problemas de Aprendizado de Máquina, essa relação nem sempre fica clara.

Considere, por exemplo, um cenário em que você está desenvolvendo um modelo Naive Bayes para um projeto de detecção de *spam* em uma caixa de mensagens de um novo aplicativo. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo que retorna positivo, **P**, caso ele classifique uma nova mensagem como *spam*, negativo, **N**, caso ele classifique uma nova mensagem como não *spam*, e inconclusivo, **I**, caso o algoritmo não consiga chegar a um resultado.

- Você testou diversas mensagens
- Dessas diversas mensagens testadas, você sabe que 15% são *spam*;
- 5% das mensagens que eram *spam* receberam inconclusivo no teste;
- 20% das mensagens que não eram *spam* receberam positivo no teste;
- 70% das mensagens que não eram *spam* receberam negativo no teste.

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Você submeteu uma nova mensagem ao algoritmo de análise e recebeu um resultado inconclusivo. Qual é a probabilidade de a mensagem ser *spam*?

0,081
0,091
0,101
0,111
0,121

Solução:

$$P(\text{spam} \mid \text{i}) = \frac{P(\text{i} \mid spam) \times P(\text{spam})}{P(\text{i})} =$$

$$P(\text{spam} \mid \text{i}) = \frac{5\% \times 15\%}{5\% \times 15\% + (100 - 20 - 70)\% \times (100 - 15)\%} =$$

$$= \frac{5 \times 15}{5 \times 15 + 10 \times 85} \cong 0{,}081$$

Em uma empresa de tecnologia, o prédio de pesquisa e desenvolvimento (C_1) tem formato circular e centro O, podendo ser descrito pela equação $x^2 + y^2 = 16$. Dentro deste prédio encontra-se o laboratório (C_2), também em formato circular com centro em D, sendo descrito pela equação $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

Uma estrada (t) de acesso foi construída externamente ao prédio, sendo tangente a este no ponto $C = 2\sqrt{2} \cdot (1, 1)$.

A partir do centro administrativo da empresa, localizado no centro do prédio de pesquisa e desenvolvimento, traçam-se duas rotas de acesso, tangentes ao laboratório. Essas rotas, se prolongadas, chegariam na estrada nos pontos A e B.

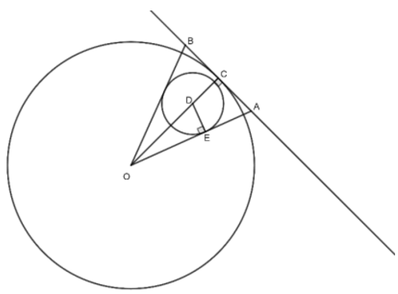
Determine a área delimitada pelo triângulo OAB.

$4\sqrt{7}$
$\frac{16\sqrt{7}}{7}$
$\frac{3\sqrt{7}}{7}$
$\frac{\sqrt{7}}{7}$
$\sqrt{7}$

Solução:

A figura abaixo representa a situação descrita no problema, pois a distância entre os centros é

$$d(O, D) = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2} < 3$$
$$= R - r$$



Seja E o ponto de tangência da reta AO em C_2. Como $D = 2 \cdot (1,1)$ e $C = 2\sqrt{2} \cdot (1, 1)$, devemos ter O, C e D colineares.

Sendo C o ponto de tangência da reta t em C_1 e O o centro de C_1, temos $\angle OCA = 90°$. Sendo E o ponto de tangência de AO em C_2 e D o centro de C_2, temos $\angle OED = 90°$

Marcando os ângulos vemos que $\Delta ODE \sim \Delta OAC$.

$$\frac{DE}{AC} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow \frac{1}{b/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + 16}} \Rightarrow 2b^2 = \frac{b^2}{4} + 16 \Rightarrow b = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{\frac{8\sqrt{7}}{7} \cdot 4}{2} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

Com o avanço dos *softwares* de IA, muito se tem discutido sobre o ensino de matemática na educação básica. O debate passa pelo tempo dispensado no ensino de cálculos e resolução de equações, quando atualmente, já existem ferramentas e modelos que fazem essas funções melhores do que um ser humano. (*The Math is fix* – Wolfram, Conrad)

Com a existência dessas ferramentas, entende-se que a discussão poderia ser mais crítica e menos mecânica. Por exemplo, como garantir que existe alguma solução, ou seja, que a ferramenta vai gerar uma resposta para o problema? Como estimar o tamanho da solução para interpretar se a solução dada é coerente?

Considere, por exemplo, a equação abaixo

$$\sqrt{2x-4}+\sqrt[3]{2024x-2023}=\sqrt{-x^2+3x-2}$$

Resolver esse tipo de equação de forma analítica, tentando "isolar" o x, não faria sentido dada a complexidade da equação.

Sendo assim, o que podemos afirmar sobre esta equação?

Não existe solução real.
Existe exatamente uma solução real.
Existem exatamente duas soluções reais.
Existem exatamente seis soluções reais.
Existem infinitas soluções reais.

Solução:

Condição de existência:

$$2x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$$

$$-x^2+3x-2\geq 0 \Rightarrow -(x-1)(x-2)\geq 0 \Rightarrow 1\leq x\leq 2$$

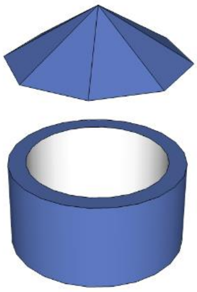
Assim, se existir solução real a única possível seria $x=2$. Testando

$$0+\sqrt[3]{2025}=0$$

Logo, não existe solução real.

Sua empresa desenvolveu um protótipo para um novo sistema embarcado utilizando o microcontrolador Arduino. Para distribuir versões de teste desse protótipo para clientes selecionados, você recebeu a responsabilidade de desenvolver um *case* para acomodar todo o equipamento. Esse *case* será impresso em 3D utilizando um filamento ABS de densidade $1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$.

O *case* é formado por dois elementos independentes entre si: a parte de baixo é um cilindro oco de raio externo $5\ \mathrm{cm}$, altura externa $5\ \mathrm{cm}$ e $1\ \mathrm{cm}$ de espessura (lateral). Já a parte de cima, uma "tampa" decorativa, é uma pirâmide sólida, cuja base é um octógono regular inscrito numa circunferência de raio $5\ \mathrm{cm}$, e altura $3\ \mathrm{cm}$. Considere a espessura da base do cilindro desprezível. A figura abaixo representa o *case*.



O custo de um rolo de $1\ \mathrm{kg}$ de filamento ABS é de aproximadamente $\mathrm{R\$}\ 50{,}00$ e o processo de produção possui uma perda de material de 10%.

Qual é, aproximadamente, o custo estimado para a impressão bem-sucedida de 100 *cases*?

Considere $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ e $\pi \cong 3{,}14$

R\$ 1.270
R\$ 1.370
R\$ 1.470
R\$ 1.570
R\$ 1.670

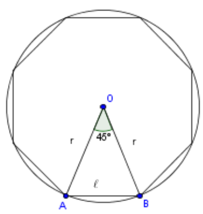
Solução: Volume do cilindro oco:

$$V = A_b \times h = \pi(R^2 - r^2)h = 5\pi(25 - 16) = 45\pi$$

Para calcular o volume da pirâmide precisamos primeiro da área da base

$$A_\Delta = \frac{ab}{2}\mathrm{sen}\theta \Rightarrow A_b = \frac{5 \times 5}{2}\mathrm{sen}45^o = \frac{25}{4}\sqrt{2}$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times 8 \times A_\Delta \times h_p = \frac{8}{3} \times \frac{25}{4}\sqrt{2} \times 3 = 50\sqrt{2}$$



Volume total: $V_T = 50\sqrt{2} + 45\pi$

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Como, $d = 1{,}08\ \mathrm{g/cm^3}$, então $\mathrm{massa_{sólido}} = 1{,}08 \times (50\sqrt{2} + 45\pi)\ \mathrm{g}$.

Considerando que existe 10% de perda de material:

$$\mathrm{m_{Total\ (um\ case)}} = \frac{1{,}08 \times (50\sqrt{2} + 45\pi)}{0{,}9} = 1{,}2 \times \left(50\sqrt{2} + 45\pi\right)\ \mathrm{g}$$

Para 100 cases,

$$\mathrm{m_{Final}} = 100 \times 1{,}2 \times \left(50\sqrt{2} + 45\pi\right)\ \mathrm{g} = 0{,}12 \times \left(50\sqrt{2} + 45\pi\right)\ \mathrm{kg}$$

Como o custo é R\$ 50,00 / kg,

$$C = 50 \times 0{,}12 \times \left(50\sqrt{2} + 45\pi\right) = 6 \times (50 \times 1{,}41 + 45 \times 3{,}14) = \mathrm{R\$}\ 1270{,}8$$

Um dos modelos mais comuns utilizados em Aprendizado de Máquina, chamado **Naive Bayes**, envolve um teorema probabilístico chamado **Teorema de Bayes**. Este teorema utiliza um conceito chamado **probabilidade condicional**, ou P(A|B), *probabilidade de A dado B*, que mede a probabilidade de um evento A acontecer, dado que um evento B ocorreu.

Por exemplo, considere as 52 cartas de um baralho de quatro naipes, composto pelas cartas $\text{Ás}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, além das cartas figuradas Valete, Dama e Rei. Em um baralho embaralhado aleatoriamente, a probabilidade de se obter uma carta Valete é:

$$P(\text{valete}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Por outro lado, a probabilidade de se obter uma carta Valete, sabendo que a carta tirada é uma carta figurada, é igual a:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Observe que, no segundo cálculo, a população usada para calcular a probabilidade é 12, uma vez que existem 12 cartas figuradas no baralho. O Teorema de Bayes é uma forma alternativa de se calcular uma probabilidade condicional, quando nem todas as informações estão disponíveis. Dados dois eventos A e B, é possível calcular P(A|B) da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Dessa forma, nosso exemplo anterior poderia ser calculado da seguinte forma:

$$P(\text{valete}|\text{figurada}) = \frac{P(\text{figurada}|\text{valete}) \times P(\text{valete})}{P(\text{figurada})} = \frac{1 \times 4/52}{12/52} = 4/12 = 1/3$$

Neste exemplo, o cálculo da probabilidade condicional é direto, uma vez que a relação causa e efeito entre os dois eventos é facilmente observável. No entanto, quando lidamos com problemas de Aprendizado de Máquina, essa relação nem sempre fica clara.

Particularmente, o problema fica mais complexo quando existem vários eventos condicionais. Considerando que um determinado problema possui dois eventos condicionais independentes **B** e **C**, o Teorema de Bayes pode ser apresentado dessa forma:

$$P(A|B,C) = \frac{P(B|A) \times P(C|A) \times P(A)}{P(B,C)},$$

onde $P(B,C)$ indica a probabilidade de ocorrer B e C

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

Considere, por exemplo, um cenário em que você está desenvolvendo um modelo Naive Bayes para um projeto de detecção de *spam* em uma caixa de mensagens de um novo aplicativo. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo que retorna positivo, **P**, caso uma nova mensagem seja *spam*, negativo, **N**, caso a mensagem não seja *spam*, e inconclusivo, **I**, caso o algoritmo não consiga chegar a um resultado. Você aplicou o algoritmo em uma série de mensagens e obteve os seguintes resultados para diferentes características que a mensagem poderia ter:

Resultado	Contém link incorporado?	Contém imagem?	Total
Positivo	60	40	80
Negativo	60	100	400
Inconclusivo	5	5	20
Total	125	145	500

Você submeteu uma nova mensagem, que contém um link incorporado e uma imagem, ao algoritmo. Qual seria o resultado mais provável fornecido pelo algoritmo?

Negativo
Há chances iguais de ser negativo ou positivo
Inconclusivo
Há chances iguais de ser inconclusivo
Positivo

Solução: Usando a expressão do enunciado

Positivo:

$$P(+|\,\text{link}, \text{imagem}) = \frac{P(\text{link}\,|\,+) \times P(\text{imagem}\,|\,+) \times P(+)}{P(\text{link}, \text{imagem})} =$$

$$P(+|\,\text{link}, \text{imagem}) = \frac{\frac{60}{80} \times \frac{40}{80} \times \frac{80}{500}}{P(\text{link}, \text{imagem})} = \frac{0{,}06}{P}$$

Negativo:

$$P(-|\,\text{link}, \text{imagem}) = \frac{P(\text{link}\,|\,-) \times P(\text{imagem}\,|\,-) \times P(-)}{P(\text{link}, \text{imagem})} =$$

$$P(-|\,\text{link}, \text{imagem}) = \frac{\frac{60}{400} \times \frac{100}{400} \times \frac{400}{500}}{P(\text{link}, \text{imagem})} = \frac{0{,}03}{P}$$

Inconclusivo

$$P(i|\,\text{link}, \text{imagem}) = \frac{P(\text{link}\,|\text{i}) \times P(\text{imagem}\,|\text{i}) \times P(i)}{P(\text{link}, \text{imagem})} =$$

$$P(i|\,\text{link}, \text{imagem}) = \frac{\frac{5}{20} \times \frac{5}{20} \times \frac{20}{500}}{P(\text{link}, \text{imagem})} = \frac{0{,}0025}{P}$$

Em uma empresa de tecnologia, o prédio de pesquisa e desenvolvimento (C_1) tem formato circular com centro em O_1, podendo ser descrito pela equação $x^2 + y^2 = 16$. Na mesma região encontra-se o laboratório (C_2), também circular com centro em O_2, sendo descrito pela equação $(x-6)^2 + y^2 = 1$

Uma estrada (t) de acesso foi construída, sendo (t) uma das tangentes exteriores comum ao prédio C_1 em A e ao laboratório C_2 em B. Além disso, foi construída uma pista (r) que passa por dentro destas estruturas, ligando os centros delas, e indo até a estrada t com ponto de encontro $C = t \cap r$.

Existem ainda outras duas pistas perpendiculares a reta r, um passando por A intersectando r em D, outra passando por O_2 intersectando t em E.

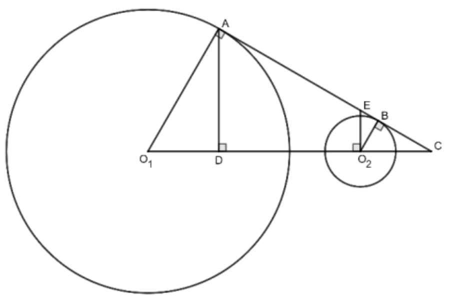
Determine a área do trapézio ADO_2E.

$12\sqrt{3}$
$\frac{4\sqrt{3}}{3}$
$5\sqrt{3}$
$8\sqrt{3}$
$\frac{16\sqrt{3}}{3}$

<u>Solução</u>:

A figura abaixo representa a situação descrita no problema, pois a distância entre os centros é

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (2-0)^2} = 6 > 4 = R + r$$



Marcando os ângulos vemos que $\Delta O_2BC \sim \Delta O_1AC$.

$$\frac{O_2B}{O_1A} = \frac{O_2C}{O_1C} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{O_2C}{6 + O_2C} \Rightarrow O_2C = 2, \text{ donde } O_1C = O_1O_2 + O_2C = 8$$

Relações métricas no triângulo retângulo:

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

$$O_1A^2 = O_1D \cdot O_1C \Rightarrow 16 = 8 \cdot O_1D \Rightarrow O_1D = 2$$

$$O_1D^2 + AD^2 = O_1A^2 \Rightarrow AD^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow AD = 2\sqrt{3}$$

Da figura,

$$DC = O_1C - O_1D = 6 \text{ e } O_2D = DC - O_2C = 4$$

Marcando os ângulos vemos que $\Delta O_2EC \sim \Delta DAC$

$$\frac{O_2C}{DC} = \frac{EO_2}{AD} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{EO_2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow EO_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Área do trapézio:

$$S = \left(\frac{B+b}{2}\right)h = \left(\frac{AD + O_2E}{2}\right) \cdot O_2D = \left(\frac{2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}\right) \cdot 4 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Com o avanço dos *softwares* de IA, muito se tem discutido sobre o ensino de matemática na educação básica. O debate passa pelo tempo dispensado no ensino de cálculos e resolução de equações, quando atualmente, já existem ferramentas e modelos que fazem essas funções melhores do que um ser humano. (*The Math is fix – Wolfram, Conrad*)

Com a existência dessas ferramentas, entende-se que a discussão poderia ser mais crítica e menos mecânica. Por exemplo, como garantir que existe alguma solução, ou seja, que a ferramenta vai gerar uma resposta para o problema? Como estimar o tamanho da solução para interpretar se a solução dada é coerente?

Considere, por exemplo, a equação abaixo

$$7(x-1)\left(\sqrt{x+11}-\sqrt[3]{6-x}\right)=15x+9$$

Resolver esse tipo de equação de forma analítica, tentando "isolar" o x, não faria sentido dada a complexidade da equação. **Sendo assim, o que podemos afirmar sobre esta equação?**

a) $x=-2$ é a única solução real. Basta substituir na equação e verificar que satisfaz!

b) $x=-2$ é a única solução real. Isso pode ser verificado analisando o comportamento das funções. O lado esquerdo da equação é decrescente e o lado direito crescente, logo se "cortam" em um único ponto.

c) $x=-2$ é uma solução real. Porém, não é única, uma vez que, elevando a sexta, teríamos um polinômio do sexto grau no lado direito, garantindo seis soluções reais.

d) $x=-2$ é a única solução real. Isso pode ser verificado "passando" o $x-1$ para o outro lado dividindo. Nesse caso, o lado esquerdo ficará crescente e o lado direito decrescente, logo se "cortam" em um único ponto.

e) $x=-2$ é uma solução real. Porém, existe exatamente uma outra solução.

Solução:

Primeiro, note que $x=-2$ e $x=5$ são soluções, basta substituir. Para formalizar que são únicas, reescreva a equação dada da seguinte forma:

$$7(\sqrt{x+11}+\sqrt[3]{x-6})=15+\frac{24}{x-1}$$

Note que o lado esquerdo é crescente e o lado direito decrescente. A princípio, se as funções fossem contínuas isso garantiria no máximo uma solução, porém testando já vimos que existem duas, por quê?

CONTINUA NA PÁGINA SEGUINTE

A função do lado direito é descontínua em $x = 1$, isso permite que exista no máximo duas soluções, uma antes de $x = 1$ e outra depois. Como encontramos estas soluções testando, estas são as únicas soluções.

Esse argumento já garante que todas as outras opções estão erradas.